Sztochasztika mintaZH

2012. ősz

Felsőbb matematika A és B tárgy, villamosmérnök MSc

Munkaidő: 45 perc

A ZH-n 3 azaz három feladat lesz, ezek mindegyike 6 vagy 7 pontot fog érni. Ebbe nem fér bele minden feladattípusból $1-1$, ezért a 3 feladat véletlenszerűen lesz kiválasztva az alábbi típuspéldákhoz nagyon hasonló feladatok közül, valamint esetleg a házi feladatokhoz nagyon hasonló feladatok közül. (A két csoport között jelentős az átfedés, de nincs tartalmazás.)

1. Egy pékségben az edénybe, amiben 5000 mazsolás keksz masszáját keverik, 20000 mazsolát öntenek.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott kekszben legalább 3 mazsola lesz?
   (b) Három kekszet kiválasztottunk, ebből az első kettőben pont 3-3 mazsola volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadikban is pont 3 lesz?
2. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét. Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.
3. Egy fagyisnál minden gyerek kiszolgálása pontosan 1 percig tart. Ezalatt új gyerekek állhatnak be a sorba. Minden gyerek kiszolgálása alatt az újonnan beállók száma pesszimista geometriai eloszlású $p = 0,75$ paraméterrel (vagyis $X \sim Geom(p)$, ha $\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p$, $k = 0, 1, \dots$) és független az előzményektől.

   Definíció: A fagyis bácsi foglaltsági periódusa az első gyerek érkezési pillanatában kezdődik és akkor ér véget, amikor először nincs kiszolgálnivaló gyerek.

   (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a foglaltsági periódus véges hosszú.
   (b) Nevezzük *első generáció*nak az első gyerek kiszolgálása alatt érkező gyerekeket, (lehet, hogy egy sincs ilyen), második generációnak pedig az első generáció kiszolgálása alatt érkezőket. Mi annak a valószínűsége, hogy a „második generáció” átvizsgálása alatt nem érkezik több gyerek (vagyis hogy a harmadik generáció már üres)?

(c) Legyen N az összes kiszolgált gyerek száma, beleértve a kezdőt is, egy foglaltsági periódus alatt. Határozzuk meg N generátorfüggvényét és várható értékét.

4. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független kockadobás-eredmények sorozata (vagyis X_i egyenletes az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. Legyen $n = 10000$ és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ha valamilyen $K \in (10000; 60000)$-re a $\mathbb{P}(S_n < K)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítás hibája a Berry-Esséen tétel szerint? (Vigyázat: a tétel legegyszerűbb formájában *nulla várható értékű* val.változókról szól, és a kockadobás eloszlása *nem ilyen.*) (A Berry-Esséen tételben szereplő C konstans egy 2010-es eredmény szerint választható $C = 0.4784$-nek.)

5. Egy kommunikációs csatornán videókat szeretnének átküldeni. Kétféle, azonos felhasználói élményt adó változó bitrátájú kódolás közül lehet választani.

   (a) Az 1. típusúban a videók átlagosan 2,8 Mbps bitrátájúak, és az átlagtól való eltérés felfelé és lefelé maximum 1,5 Mbps.

   (b) Az 2. típusúban a videók átlagosan 2,9 Mbps bitrátájúak, és az átlagtól való eltérés felfelé és lefelé maximum 0,5 Mbps.

   Tudjuk, hogy csúcsidőben maximum 10000 videóra lehet számítani. Határozzunk meg egy olyan a kapacitást, amelyet a videók összes sávszélesség igénye legfeljebb 10^{-8} valószínűséggel lép túl – külön az egyik, illetve másik kódolás használata esetén. Ezek alapján melyik kódolást érdemes választani?

6. (a) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független $\lambda = 3$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók sorozata. Legyen $n = 10000$ és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Becsüljük meg a $\mathbb{P}(S_n > 32000)$ valószínűséget a Cramer tétel segítségével. (Segítség: a λ paraméterű Poisson eloszlás Cramer féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$.)

   (b) Legyen most Y_1 egy $\mu = 30000$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Legyen $U = Y_1$, és nézzünk U-ra úgy, mint egy Y_i-kből álló $m = 1$ tagú összegre. A Cramer tétel ilyenre is érvényes. Becsüljük hát meg vele így a $\mathbb{P}(U > 32000)$ valószínűséget!

   Vigyázat: a Cramer tétel alkalmazásánál nagyon csínján kell bánni a menet közbeni kerekítésekkel.