1. a.) Mivel tudjuk, hogy $X \neq 6$, ~~X eloszlása~~ X egyenletes az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazon.

Vagyis $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{5}$, ahol $k=1,2,3,4,5$, $\cancel{6}$.

Így $g_X(z)=\frac{1}{5}z+\frac{1}{5}z^2+\frac{1}{5}z^3+\frac{1}{5}z^4+\frac{1}{5}z^5=\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5}{5}$.

Egyúttal $\mathbb{E}X=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$

b.) N pesszimista geometriai eloszlású $p=\frac{1}{6}$ paraméterrel,

vagyis $\mathbb{P}(N=k)=q^k p$, ahol $k=0,1,2,\dots$ és $q=1-p=\frac{5}{6}$.

Ebből $g_N(z)=\sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(qz)^k=\frac{p}{1-qz}=\frac{1/6}{1-\frac{5}{6}z}=\frac{1}{6-5z}$

Egyúttal $\mathbb{E}N=\frac{1}{p}-1=6-1=5$.

Legyen X_i az i-edik (nem 6-os) dobás eredménye, még az első 6-os előtt. Így az $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg éppen a keresett S.

Ebből $g_S(z)=g_N(g_X(z))=\dfrac{1}{6-5\cdot\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5}{5}}=\underline{\underline{\dfrac{1}{6-(z+z^2+z^3+z^4+z^5)}}}$

és $\mathbb{E}S=\mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X_i=5\cdot 3=\underline{\underline{15}}$

② a.) $X \sim Bin(n=2, p=\frac{3}{5})$, hiszen pontosan 2 gyereke egymástól függetlenül $\frac{3}{5}$ val.-séggel fiú. $\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{2}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{2-k}$ $k=0,1,2.$

b.) Legyen $Z_0 = 1$ (Kristóf lélekszáma)

Z_1 a Kristóf fiainak száma

Z_2 a Kristóf fiai fiainak a száma, ami egyúttal a Kirvagyi nevet örökölő fiú-unokák száma,

⋮

Z_n a Kristóf egyenesági (= férfi-ági) fiú leszármazottainak száma az n. generációban. Ez egyúttal a Kirvagyi vezetéknevű fiúk száma az n. generációban.

$\boxed{Z_n \text{ Galton-Watson elágazó folyamat}}$, éppen az X egylépéses utódszám-eloszlással.

A kérdés: $\mathbb{P}(Z_2 \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_2 = 0) = 1 - r_2 = ?$

Ehhez $g_Z(z) := g_X(z) = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{2-k}\cdot z^k = \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}z\right)^2.$

Tudjuk, hogy $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ jelöléssel $r_0 = 0$,

$r_1 = g(r_0) = g(0) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$, $r_2 = g(r_1) = g\left(\frac{4}{25}\right) = \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{25}\right)^2 = \left(\frac{62}{125}\right)^2$

$\Rightarrow \underline{\mathbb{P}(Z_2 \neq 0)} = 1 - r_2 = 1 - \left(\frac{62}{125}\right)^2 \approx \underline{\underline{0.754}}$

c.) $r_\infty = \mathbb{P}(\text{kihalás}) = ?$ Mivel $m = \mathbb{E}X = 2\cdot\frac{3}{5} = 1.2 > 1$, a folyamat szuperkritikus, így $r_\infty < 1$ és sajnos számolni kell: meg kell oldani az $g(z) = z$ egyenletet.

② c.) folytatás:

$$g(z) = z$$

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}z\right)^2 = z \quad / \cdot 25$$

$$(2+3z)^2 = 25z$$

$$4 + 12z + 9z^2 = 25z \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z = \frac{4}{9} \text{ vagy } z = 1}$$

$$9z^2 - 13z + 4 = 0$$

$$(9z-4)(z-1) = 0$$

Mivel tudjuk, hogy r_∞ ~~a legkisebb~~ < 1, így

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = r_\infty = \frac{4}{9}.} \approx 0.444$$

[Ezt onnan is lehet tudni, hogy r_∞ a $g(z) = z$ egyenlet <u>legkisebb</u> nemnegatív gyöke.]

(3) Legyen X_i az i-edik kút napi termelése, és legyen K a vezeték napi szállítási kapacitása. } hordóban számolva

Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ a napi össz-termelés, $n = 700$.

Kérdés, mennyi legyen K, hogy $\mathbb{P}(S_n > K) \le 10^{-4}$ legyen.

Tudjuk, hogy $\mathbb{E} S_n = 560000$, és hogy

$a_i \le X_i \le b_i$, ahol
- 400 db i-re $a_i = 880$, $b_i = 1380$
- 300 db i-re $a_i = 200$, $b_i = 1200$.

Az X_i-k függetlenek, így a Hoeffding egyenlőtlenség miatt $t > 0$-ra

$$\mathbb{P}(S_n \ge \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

Ebből $\mathbb{E}S_n = 560000$ és

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = 400\cdot(1380-880)^2 + 300\cdot(1200-200)^2 =$$

$$= 400\cdot 500^2 + 300\cdot 1000^2 = \underbrace{\left[4\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot 1^2\right]}_{4}\cdot 100\cdot 1000^2 =$$

$$= 4\cdot 10^8$$

Legyen $K = \mathbb{E}S_n + t$, ahol t olyan, hogy $\exp\left(-\frac{2t^2}{4\cdot 10^8}\right) = 10^{-4}$.

Ezt megoldva $-\frac{2t^2}{4\cdot 10^8} = -4\cdot\ln 10$

$$t^2 = 2\cdot\ln 10\cdot 4\cdot 10^8 \Longrightarrow t = 2\cdot 10^4\cdot\sqrt{2\ln 10}$$

Vagyis $t \simeq 42919$, $K \simeq 602919$.

$\boxed{\text{Napi 602920 hordónyi szállítókapacitás legalább } 1-10^{-4} \text{ valószínűséggel elég lesz.}}$