Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2014. január 7. 12:00. Munkaidő: 60 perc.

1. Egy hamis érmén a fej valószínűsége $\frac{4}{10}$, de Móricka azt állítja, hogy ő mégis képes vele 1000 dobásból legalább 500-szor fejet dobni. Pistike a centrális határeloszlás tétel segítségével akarja meggyőzni Mórickát, hogy ennek a valószínűsége rettentő kicsi. Igen ám, de legfeljebb mennnyi lehet a Pistike által számolt becslés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételbeli konstans választható 0.48-nak.)

2. Móricka elhatározza, hogy addig dobál egy dobókockát, amíg 1000-szer ki nem jön neki a hatos. (Persze nem feltétlenül kell az 1000 hatosnak egymás után kijönni.) Valamelyik nagy eltérés tétel segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez legfeljebb 5000 dobásból sikerül neki.

   (Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \left(\frac{x}{1-x} \frac{1-p}{p} \right) + \ln \left(\frac{1-x}{1-p} \right)$$

   (ha $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \left(\frac{x-1}{x} \frac{1}{1-p} \right) + \ln \left(\frac{1}{p} \frac{1-p}{x-1} \right)$$

   (ha $x > 1$).)

3. Egy számolóközpontba Poisson-folyamat szerint érkeznek a számítási feladatok, óránként átlagosan 2, és beállnak a sorba. A feladatok nagyon nagyok, egyszerre legfeljebb 5 fér a sorba. Ha tele a sor, az esetleg érkező feladatok elvesznek. Az egyes feladatok végrehajtása minden egyébtől független, exponenciális eloszlású véletlen időt vesz igénybe, aminek a várható értéke 1 óra. A számolóközpontban 3 számítógép van. Ha üres a sor, akkor persze mind áll. Ha 1 feladat van, akkor 1 dolgozik, ha 2, akkor 2 dolgozik 1-1 feladaton, ha több, akkor mind a 3 dolgozik 1-1 feladaton.

   Jelölje X_t a t időpontban a sorban álló feladatok számát.

   a.) Írjuk fel az X_t folytonos idejű Markov lánc állapotterét és infinitezimális generátorát.

   b.) Számoljuk ki a Markov lánc stacionárius eloszlását.

   c.) Egy számítógép teljesítményfelvétele $1000W$ amikor dolgozik, üresjáratban viszont elhanyagolható. Mennyi lesz a teljes rendszer átlagos teljesítményfelvétele hosszú távon?

4. Egy készülék élettartama órákban mérve abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

   $$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

   ahol λ ismeretlen pozitív paraméter. Néhány ilyen készülék élettartamát megmértük, és a következő eredményeket kaptuk (órákban): 11.8; 13.3; 12.1; 17.8; 11.4; 13.5; 12.0. Adjunk maximum likelyhood becslést a λ paraméter értékére.

   (Megjegyzés: Az eloszlás a $k = 2$ alakparaméterű, λ ráta-paraméterű Γ-eloszlás, és olyan készüléket modellez, ahol egy exponenciális élettartamú alkatrész mellett egy vele azonos pótalkatrész van, ami az első meghibásodásakor lép működésbe – vagyis az élettartam két független exponenciális összege.)