Sztochasztika 2 vizsga megoldókulcs Felsőbb matematika tárgy.

2015. január 6. 13:00. Munkaidő: ≤60 perc.

1. *(7 pont)* Használható-e a Hoeffding-egyenlőtlenség, és használható-e a Cramér nagy eltérés tétel a $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < K)$ valószínűség becslésére (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? *A válaszokat indokoljuk!*

   a.) Az X_k-k független 1 paraméterű exponenciálisok.

   b.) Az X_k-k független és azonos, de ismeretlen eloszlásúak, viszont $P(2 \leq X_k \leq 5) = 1$, továbbá ismert a várható értékük és a szórásuk.

   c.) X_k egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

   d.) X_k egyenletes a $[0, k]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

   e.) Jancsi egy szabályos érmét dobál. X_k legyen 1, ha a k-adik és a $k+1$-edik dobás is fej, egyébként pedig legyen 0.

Megoldás: *(Minden hibátlan részfeladat* 1 *pont. Hibás vagy hibásan indokolt részfeladatra nem jár pont. Ha mind jó, akkor további* 2 *pont.)* A Hoeffding-egyenlőtlenség akkor használható, ha az X_k-k függetlenek, korlátosak és az összeg várható értéke ismert. A Cramér tétel akkor használható, ha az X_k-k függetlenek, azonos eloszlásúak, és az eloszlásuk ismert (plusz egy enyhe technikai feltétel a momentum-generáló függvényről). Ennek alapján

	Hoeffding	Cramér
a.)	NEM, mert nem korlátosak	IGEN
b.)	IGEN	NEM, mert ismeretlen az eloszlás
c.)	IGEN	IGEN
d.)	IGEN	NEM, mert nem azonos eloszlásúak
e.)	NEM, mert nem függetlenek	NEM, mert nem függetlenek

2. *(9 pont)* Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár”, illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel”.

   Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

   b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

   c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

Megoldás: Az állapotokat jelöljük számokkal: legyen $S = \{0, 1\}$ ahol 0 a passzív, 1 pedig az aktív állapot. Jelöljük a rendszer állapotát t idő elteltével X_t-vel. Mivel csak két állapot van, ugrani persze 0-ból csak 1-be, 1-ből pedig csak 0-ba lehet.

a.) Az 1-ből 0-ba ugrás rátája $\lambda_{10} = 60$, mert a feldolgozással eltöltött idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{60}$. A 0-ból 1-be ugrás rátája $\lambda_{01} = 2$, mert ilyen rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek a jelek. Ezek a λ_{ij}-k lesznek a G infinitezimális generátor főátlón kívüli elemei. A főátlót pedig úgy töltjük ki, hogy minden sorösszeg 0 legyen. Így

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 60 & -60 \end{pmatrix}.$$

b.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az egyes állapotok valószínűségei tartanak a (z egyetlen) stacionárius eloszlás szerinti súlyokhoz. 10 óra azaz 600 perc pedig (ilyen ráták mellett) hosszú idő. Ezért keressük a $\pi = (\pi_0\ \pi_1)$ stacionárius eloszlást a $G^T\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{pmatrix} -2 & 60 \\ 2 & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avagy a lineáris algebrában szokásos tömör jelöléssel

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 60 & 0 \\ 2 & -60 & 0 \end{array}\right).$$

A két egyenlet egymásnak -1-szerese, így elég mondjuk az elsőt nézni: $-2\pi_0 + 60\pi_1 = 0$, amiből $\pi_0 = 30\pi_1$. Például $\pi_1 = 1$ választással is megkapjuk az egyenletrendszer egy lehetséges megoldását: $\tilde{\pi} = (30\ 1)$. A keresett stacionárius eloszlás ennek olyan konstansszorosa, amiben az elemek összege 1:

$$\pi = \left(\tfrac{30}{31}\quad \tfrac{1}{31}\right).$$

A Markov láncok alaptétele szerint tehát $\mathbb{P}(X_{600} = 1) \approx \pi_1 = \frac{1}{31} \approx 0.0323$.

c.) A pillanatnyi teljesítményfelvétel a t időpontban $f(X_t)$, ahol az $f : S \to \mathbb{R}$ megfigyelhető mennyiség olyan, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 10$. Ezt célszerű oszlopvektorként írni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében $f(X_t)$ időátlaga hosszú távon (1 valószínűséggel) tart az egyetlen π stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f = \left(\tfrac{30}{31}\quad \tfrac{1}{31}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{30}{31}\cdot 1 + \frac{1}{31}\cdot 10 = \frac{40}{31} \approx 1.29.$$

3. *(9 pont)* Ha egy ember kitölt egy IQ-tesztet, az eredmény normális eloszlású valószínűségi változó. Ennek várható értékét definíció szerint az illető ember *intelligencia-hányadosának* nevezzük, szórása pedig 3. Ádám és Éva is kitöltött néhány független IQ-tesztet, egymástól is függetlenül. Ádám pontszámai: 111, 108, 111, 112. Éva pontszámai: 114, 112, 114, 119, 113. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Ádám és Éva intelligencia-hányadosa azonos.

Megoldás: Ismert szórású normális eloszlásokból vettünk mintát, a cél pedig a várható értékek összehasonlítása. Jelöljük x_i-vel az Ádám, y_i-vel pedig az Éva pontszámait. A null-hipotézis $m_x = m_y$. Ezért kétmintás kétoldali u-próbát végzünk. A szórások $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, a minta-elemszámok $n_1 = 4$ és $n_2 = 5$. Az átlagok $\bar{x} = \frac{111+108+111+112}{4} = 110.5$ és $\bar{y} = \frac{114+112+114+119+113}{5} = 114.4$. A teszt-statisztika a képletgyűjtemény szerint

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{110.5 - 114.4}{\sqrt{\frac{3^2}{4} + \frac{3^2}{5}}} = \frac{-3.9}{3\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}} \approx -1.938.$$

$1 - \varepsilon = 95\%$-os szinten akarunk döneni, vagyis $\varepsilon = 0.05$. A küszöbérték a képletgyűjtemény szerint

$$K = u_{\frac{\varepsilon}{2}} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}) = \phi^{-1}(0.975) \approx 1.96.$$

Döntés: $|u| \le K$, azért a hipotézist *elfogadjuk*.