① a.) Az utódszám várható értéke $m = \sum_k k\,\mathbb{P}(k \text{ utód}) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} =$

$= \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow$ a folyamat szuperkritikus $\Rightarrow$ számolni kell:

Az utódszám generátorfüggvénye

$$g(z) = \sum_k \mathbb{P}(k \text{ utód})\cdot z^k = \frac{1}{4}\cdot z^0 + \frac{1}{4}\cdot z^1 + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1+z+2z^2}{4}.$$

A kihalási valószínűség ennek legkisebb nemnegatív fixpontja: $g(z) = z$, vagyis $\frac{1+z+2z^2}{4} = z \quad /\cdot 4$

$1+z+2z^2 = 4z$, vagyis $0 = 2z^2 - 3z + 1$

$z = 1$ vagy $\boxed{z = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = \frac{1}{2}}$

b.) Az utódszám várható értéke

$$m = \sum_k k\,\mathbb{P}(k \text{ utód}) = 0\cdot\frac{7}{10} + 1\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot 0 + 3\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot 0 + 5\cdot\frac{1}{10} = \frac{9}{10} < 1$$

$\Rightarrow$ a folyamat szubkritikus $\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1}$

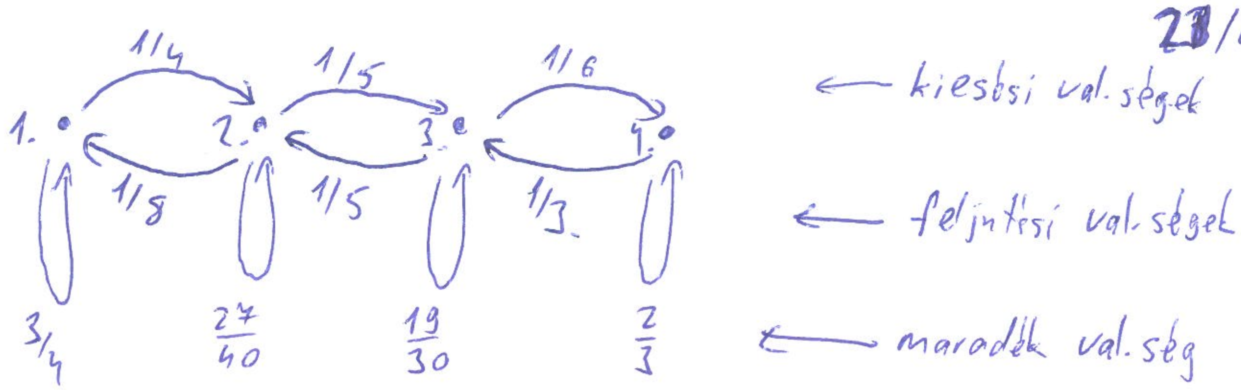
c.) $m = \mathbb{E}(Poi(1)) = 1 \Rightarrow$ a folyamat kritikus (és nem elfajult)

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1}$

d.) Mindenkinek van utódja $\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 0}$

(2)

a.)



b.) $S = \{1, 2, 3, 4\}$ az állapottér,

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{27}{40} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{19}{30} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ az átmenetmátrix

c.) X_n születési-halálozási folyamat, így a szomszédos állapotok stac. súlyainak aránya könnyen leolvasható:

$$\frac{\pi_i}{\pi_{i+1}} = \frac{P_{i+1,\,i}}{P_{i,\,i+1}},$$ vagyis $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{\pi_2}{\pi_3} = 1$; $\frac{\pi_3}{\pi_4} = \frac{2}{1}$,

amiből $\pi_1 \div \pi_2 \div \pi_3 \div \pi_4 = 1 \div 2 \div 2 \div 1$. Lenormálva

$$\boxed{\pi = \left(\frac{1}{6};\ \frac{2}{6};\ \frac{2}{6};\ \frac{1}{6}\right)}.$$

(A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, így pontosan 1 stac. eloszlás van.)

② folytatás

d.) A Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, ezért a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az eloszlás tart a stacionárius eloszláshoz.

30 év hosszú idő, így $\boxed{\mathbb{P}(X_{30}=4) \approx \pi_4 = \frac{1}{6}}$

e.) Legyen $f: S \to \mathbb{R}$ megfigyelhető mennyiség az éves nézőszám. Oszlopvektor formában

$$f = \begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

A Markov lánc véges állapotterű és aperiodikus, így az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon tart a stac. eloszlás szerinti várható értékhez:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 500 \end{pmatrix} = \frac{21000}{12} = \boxed{1750}$$

3

Egyoldali egymintás u-próbát végzünk, mert

- A nullhipotézis: $H0: m \geq 50$ =: egy egyenlőtlenség
- Az egyetlen adatsor várható értékét egy konstanssal kell összehasonlítani
- a szórás ismert: $\sigma = 9$.

A minta: 37; 35; 39, ebből $n=3$, $\bar{x} = 37$.

A teszt-statisztika a képletgyűjtemény szerint

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{37-50}{9}\cdot\sqrt{3} \approx -2.502$$

A küszöb a képletgyűjtemény szerint: Mivel 99%-os szinten végezzük a próbát, $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $k := u_\varepsilon = \phi^{-1}(1-\varepsilon) = \phi^{-1}(0.99) \approx 2.33$

Döntés: $u < -K \Rightarrow$ a nullhipotézis $\boxed{\text{ELVETJÜK}}$.

Helyette „bizonyítást nyert" az ellenhipotézis: $H1: \boxed{m < 50}$