Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2014. január 14. 12:00. Megoldókulcs.

1. Legyen Z_k Galton-Watson elágazó folyamat, ahol az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{z-1}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal? *(5 pont)*

   Megoldás: Az egylépéses utódszámeloszlás várható értéke $m = g'(1) = 1$, vagyis a folyamat kritikus. Ezért a kihalás valószínűsége 1.

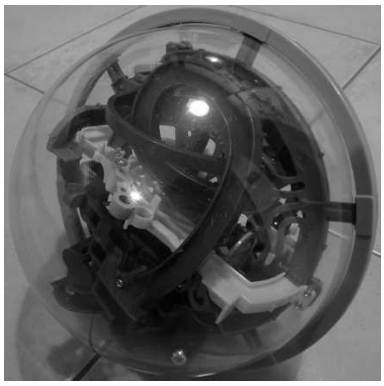
2. Egy vizsgán 120 hallgató jelenik meg, közülük 90 készült, 30 pedig nem. Aki készült, 90% valószínűséggel megy át, aki viszont nem, az csak 30%-kal. Adjuk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a hallgatók legalább fele megbukik. *(6 pont)*

   Megoldás: Legyen $n = 120$ és $k = 1, 2, \ldots, n$-re $X_k = 1$, ha a k-adik hallgató megbukik, és $X_k = 0$, ha nem. Legyen $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ a bukott hallgatók száma, így $\mathbb{P}(S_n \geq 60)$-ra keresünk nagy eltérés becslést.

   Mivel az X_k-k nem azonos eloszlásúak (a készületlenek nagyobb valószínűséggel buknak), a Cramer tétel (közvetlenül) nem alkalmazható, így a Hoeffding-egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni. Ehhez minden k-ra $a_k = 0$, $b_k = 1$-gyel $a_k \leq X_k \leq b_k$, valamint $\mathbf{E}S_n = 90 \cdot 0.1 + 30 \cdot 0.7 = 30$, vagyis $t = 30$ választással a Hoeffding-egyenlőtlenség azt adja, hogy

$$\mathbb{P}(S_n \geq 60) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbf{E}S_n + t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2)}\right\} = e^{-\frac{2\cdot 30^2}{120\cdot 1^2}} = e^{-15} \approx 3.06 \cdot 10^{-7}.$$

3. Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről.
   Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



Magical Intellect Ball

   a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát. *(2 pont)*

   b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal? *(4 pont)*

   c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon? *(2 pont)*

   Megoldás:

   a.) Az $S = \{0, 1, 2, 3\}$ állapottérrel

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b.) Keressük a π stacionárius eloszlást, amihez megoldjuk a $(P-I)^T\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ennek megoldása az $\sum_{i \in S} \pi_i$ normálási feltételt is figyelembe véve

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

vagyis a Markov lánc a 0 állapotban van legtöbbször (hát persze), éspedig az ergodtétel értelmében hosszú távon a lépések $\frac{4}{10}$-ében. (A lánv irreducibilis és aperiodikus, az ergodtételt az egyes állapotok indikátorfüggvényeire alkalmazhtajuk.)

c.) A lépések $\frac{4}{10}$-ében próbálkozik Móricka az 1-es akadályal, ezen belül mindig $\frac{1}{4}$ val.séggel bukik el, vagyis a lépések $\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$-ében éppen az 1-es akadályt bukja. Hasonlóan a 2-es és 3-as akadályt is a lépések $\frac{1}{10}$-ében bukja, vagyis **hosszú távon mindhárom akadályon ugyanannyiszor, az összes bukás $\frac{1}{3}$-ában bukik.**

4. Egy (esetleg) hamis dobókockán a 6-os valószínűsége valami ismeretlen $p \in (0;1)$, az összes többi szám valószínűsége pedig azonos, $\frac{1-p}{5}$. A kockával 10-szer dobva mintát vettünk az eloszlásból, és azt kaptuk, hogy $5;6;4;3;4;6;3;1;6;3$. Adjunk maximum likelihood becslést p értékére. *(6 pont)*

Megoldás: A diszkrét valószínűségeloszlás $p(x) = p$, ha $x = 6$ és $p(x) = \frac{1-p}{5}$, ha $x = 1,2,3,4,5$. Így ha $n = 10$ és a minta $x_1, \ldots, x_n$, akkor a likelihood-függvény

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i),$$

esetünkben

$$L(p) = \left(\frac{1-p}{5}\right)^7 \cdot p^3,$$

ennek logaritmusa

$$l(p) = 7\ln(1-p) - 7\ln 5 + 3\ln p.$$

A maximum likelihood becsléshez az $l'(p) = 0$ egyenletet megoldva

$$p_{ML} = \frac{3}{10}.$$

További deriválással (pl.) ellenőrizhető, hogy ez tényleg globális maximumhelye l-nek.