

Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2014. január 21. 12:00. Munkaidő: 60 perc.

1. Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\text{ha } x > 0).$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\text{ha } x > 0).$$

2. A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t . Az időt mérjük hónapokban.

- a.) Modellezzük X_t -t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünk észnél a rátákkal!*
- b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
- c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?
- d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?
- e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).
3. Mintát vettünk egy X normális eloszlású valószínűségi változóból, melynek várható értéke *ismert*: $m = 1000$, de szórása ismeretlen. Azt kaptuk, hogy 997, 1002, 998, 1003, 996, 1001, 998, 1004, 1005. Adjunk maximum likelihood becslést az eloszlás szórására.

4. Egy hegy tengerszint feletti magasságára vagyunk kíváncsiak, de csak hibával terhelt tudjuk megmérni: a mérési eredmény normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke az (általunk nem ismert) tényleges magasság, szórása pedig 20 méter. Végrehajtottunk 10 egymástól független mérést, és a következő számokat kaptuk (méterben): 7009, 7023, 6999, 6994, 6978, 7014, 6989, 6997, 7009, 6993.

Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a hegy legalább 7000 méter magas.