Sztochasztika félvizsga

Felsőbb matematika villamosmérnököknek A, B vizsgakurzus

2015. május 26. 8:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat 10 pontot ér.

1. Mórickának egy számítógépes kalandjátékban egy szint teljesítéséhez egy szörnyet kellene időre legyőzni, ám ez csak $\frac{3}{10}$ valószínűséggel sikerül. $\frac{3}{10}$ valószínűséggel ugyanis, mire a szörnyet legyőzi, megjelenik egy ugyanilyen szörny, a maradék $\frac{4}{10}$ valószínűséggel pedig kettő is. Ezeket aztán szintén le kell győzni, ami alatt szintén érkezhetnek újabbak stb ..., az előzményektől függetlenül.

   Mennyi annak a valószínűsége, hogy Móricka előbb-utóbb teljesíti a szintet?

2. Egy repülőre a 200 utas közül 150-en csak fejenként egy bőröndöt adnak fel, ami legfeljebb 20 kilós lehet, de átlagosan csak 8 kiló szokott lenni. A maradék 50 utas fejenként két bőröndöt ad fel, amik (ketten) összesen legalább 20, legfeljebb 40 kilósak – a sokévi átlag 30 kiló. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a feladott bőröndök össztömege meghaladja a 3500 kg-ot.

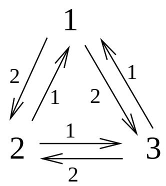
3. Négy gyerek ül egy asztal körül. Egy játékmacit adogatnak egymásnak úgy, hogy egy szabályos dobókockát dobálnak és mindig annyiszor adják tovább a macit (mindig jobbra), amennyit dobtak.

   a.) Modellezzük a maci helyét az egyes dobások után Markov lánccal. Írjuk fel az állapotteret és az átmenetmátrixot.

   b.) Kezdetben a maci Mórickánál van. Mi a valószínűsége, hogy két dobás után újra nála lesz?

   c.) Kezdetben a maci Mórickánál van. Mi a közelítő valószínűsége, hogy 100 dobás után újra nála lesz? Miért?

4. Az alábbi ábra egy folytonos idejű (időben homogén) Markov lánc lehetséges egylépéses átmeneteit mutatja, a hozzájuk tartozó urgási rátákkal együtt.



   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

   b.) Ha a Markov lánc kezdetben a 2 állapotban van, mi a közelítő valószínűsége, hogy 100 időegység eltelte után a 3 állapotban találjuk?

   c.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz a rendszer az 1-es és 2-es állapotok valamelyikében?

5. Egy hegy tengerszint feletti magasságára vagyunk kíváncsiak, de csak hibával terhelten tudjuk megmérni: a mérési eredmény normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke az (általunk nem ismert) tényleges magasság, szórása pedig 20 méter. Végrehajtottunk 10 egymástól független mérést, és a következő számokat kaptuk (méterben): 7009, 7023, 6999, 6994, 6978, 7014, 6989, 6997, 7009, 6993.

   Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a hegy legalább 7000 méter magas.