

Sztochasztika félévvizsga

Felsőbb matematika villamosmérnököknek A, B vizsgakurzus

2015. június 2. 8:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat 10 pontot ér.

1. Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mennyi c értéke?
(b) Mennyi X várható értéke?
(c) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?
2. Legyen Z_k Galton-Watson elágazó folyamat, ahol az egy lépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{z-1}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?
3. Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.
- a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!
b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?
c.) A napok hanyad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?
4. Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\text{ha } x > 0).$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\text{ha } x > 0).$$

5. Ha egy ember kitölt egy IQ-tesztet, az eredmény normális eloszlású valószínűségi változó. Ennek várható értékét definíció szerint az illető ember *intelligencia-hányadosának* nevezzük, szórása pedig 3. Ádám és Éva is kitöltött néhány független IQ-tesztet, egymástól is függetlenül. Ádám pontszámai: 111, 108, 111, 112. Éva pontszámai: 114, 112, 114, 119, 113. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Ádám és Éva intelligencia-hányadosa azonos.