Sztochasztika félvizsga megoldások

Felsőbb matematika villamosmérnököknek A, B vizsgakurzus

2015. június 9. 8:00. Munkaidő: 70 perc.

1. Legyen Z_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ Galton-Watson elágazó folyamat, ahol $Z_0 = 1$ és az egylépéses utódszám-eloszlás

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(k \text{ utód})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

Megoldás: Mivel mindenkinek legalább egy utóda születik, a kihalás valószínűsége nulla.

2. Egy forgalmas helyen lévő készpénzautomatát egy nap alatt (feltöltéstől feltöltésig) 500 ember használ. A legkisebb felvehető összeg ezer Ft, a legnagyobb százezer Ft. A bank tapasztalata szerint az emberek átlagosan 20-ezer Ft-ot vesznek fel. Az egyes emberek által felvett összegek függetlenek egymástól. Mennyi pénzzel kell az automatát feltölteni, ha 99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig?

Megoldás:
Legyen $n = 500$, és számoljunk minden pénzösszeget „ezerFt"-ban, hogy ne kelljen olyan nagy számokat írni. Az egy nap alatt felvett összeg

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

ahol X_i az i-edik ember által felvett összeg. S_n várható értéke a szöveg szerint $\mathbb{E}S_n = n \cdot 20 = 10000$.

A Hoeffding-egyenlőtlenség szerint minden pozitív t-re

$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right),$$

ahol a_i és b_i az X_i alsó illetve felső korlátja: esetünkben minden $a_i = 1$ és $b_i = 100$, így a tört nevezője

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 500 \cdot (100 - 1)^2 = 4900500.$$

Legyen tehát a betöltött pénz $K = \mathbb{E}S_n + t$, ahol

$$\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) = 0.01 \quad \text{(és nem pedig 0.99)},$$

vagyis

$$-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \ln(0.01) = -2 \ln 10,$$

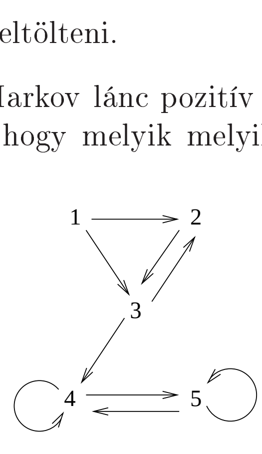
amiből

$$t = \sqrt{(\ln 10) \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \sqrt{\ln 10 \cdot 4900500} \approx 3359.$$

Tehát $K \approx 10000 + 3359 = 13359$ eFt-tal kell az automatát feltölteni.

3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



Megoldás:

osztály	zártság	lényegesség	visszatérés	periódus
$\{1\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	∞, vagy nincs
$\{2;3\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	2
$\{4;5\}$	zárt	lényeges	visszatérő	1, aperiodikus

Édemes megjegyezzni, hogy az $\{1\}$ egy tisztességes egyelemű osztály: önmagával definíció szerint minden állapot kommunkiál, még akkor is, ha pozitív lépésszámban nem lehet oda önmagából (sem) visszajutni. Másképp mondva: az $i \leftrightsquigarrow j$ reláció („i kommunikál j-vel") egy rendes ekvivalencia, és a belőle adódó osztályozásnak az állapottér minden elemét le kell fedni. Az más kérdés, hogy az $\{1\}$ osztály periódusa problémás: az üreshalmaz legnagyobb közös osztója, ami ízlés szerint lehet ∞, vagy nem definiált.

4. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t $(t \geq 0)$ a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

   (a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

   (b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

   (c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

   (d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

   (e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

Megoldás:
X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat. Az időt percben mérjük, így a felfelé ugrás rátája (autó jön) mindig $\frac{1}{5}$, hacsak nem tele van a parkoló, a lefele ugrás rátája (autó megy) pedig az i állapotból $i \cdot \frac{1}{5}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(a) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3\}$, a generátor

$$G = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

(b) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_0 : \pi_1 = 1 : 1$, $\pi_1 : \pi_2 = 2 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$,. Összesítve $\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = 6 : 6 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $G^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy (az átláthatóság kedvéért 5-tel végigszorozva)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

(c) Hosszú idő elteltével a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_t = 0 \,|\, X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{6}{16} = 37.5\%$.

(d) Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i \in S} i \cdot \pi_i = 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0.94.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

(e) A parkoló az idő $\pi_3 = \frac{1}{16}$-ában van tele, tehát az autósoknak pontosan azt az $\frac{1}{16}$-át azaz 6.25%-át veszítjük el, aki ezalatt jön. Másképpen számolva: percenként átlagosan $\frac{1}{5}$ autós jön arra, de a Markov lánc felfelé ugrásainak száma (vagyis a ténylegesen leparkoló autók száma) időátlagban csak $\pi_0 A_{01} + \pi_1 A_{12} + \pi_2 A_{23} = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{5}$, vagyis az arra járó autók $\frac{1}{16}$-oda nem parkol le.

5. Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig $8M\Omega$. Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.

Megoldás:
Kétmintás egyoldali u-próbát végzünk, a nullhipotézis H0: $m_A \geq m_B$. A teszt-statisztika

$$u = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}},$$

ahol $n_A = 9$, $n_B = 6$, $\bar{x}_A = 759$, $\bar{x}_B = 763$, $\sigma_A = \sigma_B = 8$. A korrigált tapasztalati szórásnégyzetekre nincs szükség, mert a szórás ismert. Mindezt behelyettesítve

$$u = \frac{759 - 763}{\sqrt{\frac{8^2}{9} + \frac{8^2}{6}}} \approx -0.95.$$

A küszöbszám, amivel ezt össze kell hasonlítani, $K = u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$, ahol $1 - \varepsilon = 99\%$, vagyis $\varepsilon = 0.01$. A táblázat szerint a küszöbérték $K \approx 2.33$.

Döntés: Mivel a próbánk egyoldali és a nullhipotézis szerint $m_A \geq m_B$, a nullhipotézist akkor kell elutasítanunk, ha az A adatsor átlaga sokkal kisebb, mint a B adatsor átlaga, vagyis ha t egy túlságosan nagy abszolútértékű negatív szám. Az elutasítás feltétele tehát $t < -K$, ami *nem teljesül*, ezért a nullhipotézist *elfogadjuk*.