1. Folytonos idejű Markov-láncok

1. Három ekvivalens definíció

A következőkben definiáljuk a diszkrét állapotterű, folytonos idejű Markov-lánc fogalmát. Az állapotteret $\mathcal{S}$-sel fogjuk jelöli.

Legyen adott egy diszkrét idejű Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixszal úgy, hogy a főátlóban lévő elemek 0-k, $Q_{ii} = 0$, $i \in \mathcal{S}$. Ez azt jelenti, hogy ha i-ben tartózkodik tetszőleges i állapotra, akkor nem maradhat i-ben a következő lépés után.

Legyen adott továbbá minden i-hez egy $\lambda(i)$ nem negatív valós szám, amit tartási/tartózkodási idő paraméternek hívunk.

Ekkor a folytonos idejű Markov-láncot úgy írhatjuk le, hogy ő egy bolyongás az $\mathcal{S}$ állapottéren. Ha i-be ugrott, akkor véletlen hosszú ideig marad i-ben. Ennek az i-ben tartózkodásnak a hossza exponenciális eloszlású $\lambda(i)$ paraméterrel. Amikor letelik ez az idő, akkor elugrik, mégpedig a Q átmenetvalószínűség mátrixnak megfelelően, tehát j-be ugrik Q_{ij} valószínűséggel.

A pontos definíció a következő.

1. definíció. Legyen $\mathcal{S}$ egy diszkrét halmaz. Adott egy Q átmenetvalószínűség mátrix úgy, hogy minden $i\mathcal{S}$ esetén $Q_{ii} = 0$. Adott továbbá egy $\lambda(i) \geq 0$ $i \in \mathcal{S}$ sorozat.

Legyen $X_0, X_1, \ldots$ egy Q átmenetvalószínűség mátrixszal rendelkező Markov-lánc.

Legyen $T_1 < T_2 < \ldots$ egymás utáni ugrási idők sorozata, $T_0 = 0$, úgy, hogy az $(n+1)$-dik és az n-dik ugrás között eltelő idő eloszlása $Exp(\lambda(X_n))$, azaz

$$T_{n+1} - T_n \sim Exp(\lambda(X_n)).$$

Ekkor az $X(t), t \geq 0$ folytonos idejű Markov-lánc definíciója:

$$X(t) = X_n \quad \text{ha } T_n \leq t < T_{n+1},$$

azaz két ugrás között konstans, és az értékét a beágyazott Markov-lánc X_n határozza meg.

Az alkalmazások többségében fontos, hogy a Markov-lánc véges idő alatt ne ugorjon végtelen sokat pozitív valószínűséggel, vagy más szóval ne robbanjon fel. Erre vannak feltételek, amikre most nem térünk ki. Az alkalmazások többségében ez a stabilitás szinte természetesen fenáll.

A következőkben megadjuk a Markov-folyamat második definícióját, amely ekvivalens az elsővel. Ehhez ismételjünk át néhány dolgot exponenciális eloszlásokkal kapcsolatban.

1. <u>állítás</u>. Legyen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ független exponenciális eloszlások sorozata sorrendben $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ paraméterrel.

A legkisebb közülük $\min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$. Ennek a minimumnak az eloszlása exponenciális $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ paraméterrel:

$$\min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\} \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m)$$

Annak a valószínűsége, hogy az i-dik a legkisebb felírható a következőképpen:

$$\mathbf{P}(Y_i = \min\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m}.$$

2. definíció. Legyen adott egy $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$ mátrix úgy, hogy az elemei nem negatívak és a főátlóban csupa 0 áll. Definiáljuk a folytonos idejű $X(t), t \geq 0$ Markov-láncot úgy, hogy legyen $X(0) = i_0$ valamilyen $i_0 \in \mathcal{S}$ kezdőállapotra. Továbbá, ha $X(t) = i$ tetszőleges $i \in \mathcal{S}$ és t időre, akkor minden olyan j állapotban, ahol $\lambda_{ij} \neq 0$ elindítunk egy órát, amelyek egymástól függetlenül csengenek véletlen hosszú idő múlva. Ennek az időnek a hossza exponenciális eloszlású minden állapotra, és a j állapotban lévő óránál az exponenciális eloszlás paramétere λ_{ij}.

A Markov-folyamat akkor ugrik, amikor az első óra megszólal, és abba az állapotba ugrik, ahol először csengett az óra.

A 1. állítás miatt a két definíció ekvivalens a következő megfeleltetésekkel:

$$\lambda(i) = \sum_{k:\lambda_{ik} \neq 0} \lambda_{ik} = \sum_{k \in \mathcal{S}} \lambda_{ik} \quad \text{és} \quad Q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{S}} \lambda_{ik}}.$$

Ezután leírjuk a folytonos idejű Markov-láncok harmadik definícióját, amely a diszkrét időben leírt Markov-lánc definícióhoz hasonlít, az úgynevezett Markov-tulajdonságot adja meg folytonos időben.

3. definíció. Az $\mathcal{S}$ állapottéren értelmezett $X(t), t \geq 0$ sztochasztikus folyamatot folytonos idejű Markov-láncnak nevezzük, ha minden n-re és $s, t > 0$ számra, és $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t$ időkre, továbbá $i, j, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in \mathcal{S}$ állapotokra igaz a

$$\mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(t) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) = \mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(t) = i). \quad (1)$$

egyenlőség.

Ha feltesszük, hogy a fenti feltételes valószínűség nem függ tt-ől, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc homogén, azaz

$$\mathbf{P}(X(t+s) = j \mid X(t) = i) = \mathbf{P}(X(s) = j \mid X(0) = i).$$

A (1) egyenlőség azt jelenti, mint diszkrét idő esetén, hogy feltéve a folyamat jelenét $X(t) = i$-t a folymat jövője $(X(t+s) = j)$ független a folyamat múltjától $(X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0)$.

4. definíció. Jelöljük $P(t)$-vel a t idejű átmenetvalószínűség mátrixot. $P(t)$ ij koordinátájú helyén $P_{ij}(t) = \mathbf{P}(X(t) = j \mid X(0) = i)$ valószínűség áll.

2. állítás. A Markov-folyamat három definíciója ekvivalens.

2. Tulajdonságok, példák

- Folytonos idejű Markov-lánc állapotteres felbontását érintkezési ekvivalencia osztályokra a beágyazott Markov-lánc állapotteres felbontása határozza meg.
- Hasonlóan a diszkrét esethez, ha megadunk $n+1$ egymás utáni időpontot $t_0 < t_1 < \ldots t < t_n$ és $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{S}$ állapotot a $\mathbf{P}(X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1 \mid X(t_0) = i_0)$ valószínűség felírható

  $$\mathbf{P}(X(t_n) = i_n, \ldots, X(t_1) = i_1 \mid X(t_0) = i_0) = P_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

  szorzat alakban.
- Hasonlóan a diszkrét idejű esethez itt is kíváncsiak vagyunk az X_t eloszlására. Ezt úgy tudjuk megadni, hogy megadunk egy kezdeti eloszlást, egy $\underline{a}$ vektort. Az j-dik eleme $a_j = \mathbf{P}(X(0) = j)$, $j \in \mathcal{S}$. Ekkor teljesen ugyanúgy, mint diszkrét esetben a teljes valószínűség tételt használva azt kapjuk, hogyan

  $$\mathbf{P}(X(t) = j) = [\underline{a}P(t)]_j.$$

1. példa. *$M/M/1$ sorbanállási rendszer.* Tegyük fel, hogy egy kiszolgálóhoz érkező csomagok érkezési időpontjai Poisson-folyamatot követnek λ rátával, az két csomag érkezése között $Exp(\lambda)$ eloszlású időt kell várni. Tegyük fel, hogy a csomagok mérete $Exp(\mu)$ eloszlású, és egymástól függetlenek. Tegyük még fel, hogy a puffer végtelen, így nincs csomagvesztés, továbbá a szerver egységnyi kapacitású és egyszerre egy csomagot tud kiszolgálni. Legyen $X(t)$ a rendszerben lévő igények száma, beleszámoljuk az éppen kiszolgálás alatt lévőt is, ha van ilyen. $X(t), t \geq 0$ folytonos idejű Markov-lánc

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda, \ \lambda_{i,i-1} = \mu, \quad \text{ha } i \geq 1$$

és $\lambda_{01} = \lambda$ rátákkal.

2. példa. *$M/M/1$ sorbanállási rendszer blokkolással.* Tekintsük az elősző feladatban definiált sorbanállási rendszert a következő módosítással. Ha egy csomag beérkezésekor i másik csomag van a rendszerben, akkor a csomag bekerül a rendszerbe α_i valószínűséggel, $1 - \alpha_i$ valószínűséggel pedig eldobódik. Tegyük fel, hogy $0 \leq \alpha_i \leq 1$ minden i-re. Legyen $X(t)$ a rendszerben lévő igények száma, beleszámoljuk az éppen kiszolgálás alatt lévőt is, ha van ilyen. $X(t), t \geq 0$ folytonos idejű Markov-lánc.

A blokkolás azt jelenti, hogy ha i csomag van a rendszerben, akkor a beérkezéseknek megfelelő Poisson-folyamat ugrásait α_i valószínűséggel tartjuk meg. Korábban láttuk, hogy az így ritkított Poisson-folyamat is Poisson-folyamat csak $\alpha_i \lambda$ rátával. Így az $X(t)$ Markov-lánc rátái a következőképpen alakulnak:

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \lambda, \ \lambda_{i,i-1} = \mu, \quad \text{ha } i \geq 1$$

és $\lambda_{01} = \alpha_0 \lambda$ rátákkal.

3. *példa.* *Folytonos idejű elágazófolyamat.* Tegyük fel, hogy egyedek egy populációját vizsgáljuk. Az egyedek egymástól függetlenül fejlődnek, de a fejlődésük ugyanolyan eloszlású. Tekintsünk egy egyedet. Ez az egyed $Exp(\lambda)$ idő múlva létrehoz egy utódot, vagy $Exp(\mu)$ idő múlva meghal. Ez a 1. állítás miatt ekvivalens azzal, hogy a megszületése után $Exp(\lambda+\mu)$ múlva történnie kell valaminek, vagy meghal $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel, vagy létrehoz egy utódot $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel. Feltesszük még, hogy ha kihal az elágazó folyamat, akkor $Exp(\lambda)$ idő múlva megjelenik egy egyed. Belátjuk, hogy ha $X(t)$ jelöli a t időben jelenlévő egyedek számát, akkor $X(t), t \geq 0$ Markov-folyamat.

Számoljuk ki, hogy ha i egyed van a populációban, akkor mennyi idő telik el az első utód létrehozásáig, illetve az első kihalásig. Ezek lesznek a $\lambda_{i,i+1}$ és a $\lambda_{i,i-1}$ ráták. Az első születésig eltelő idő a következőképpen számolható. Legyen $E_1, E_2, \ldots, E_i$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók λ paraméterrel. $E_1, E_2, \ldots, E_i$ jelölö, hogy mennyi idő telne el az egyes egyedeknél az első születésig. A 1. állítás miatt $\min\{E_1, E_2, \ldots, E_i\}$ eloszlása $Exp(i\lambda)$. Hasonlóan számolható ki az első halálig eltelő idő, amely $Exp(i\mu)$ eloszlású. Tehát, az $X(t), t \geq 0$ Markov-folyamat rátái:

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda i,\ \lambda_{i,i-1} = \mu i, \quad \text{ha } i \geq 1$$

és $\lambda_{01} = \alpha_0 \lambda$ rátákkal.

4. *példa.* *Folytonos idejű elágazófolyamat bevándorlással.* Módosítsuk őgy az előző modellt, hogy a folyamat fejlődésétől függetlenül van egy bevándorlási folyamat. Egyszerre egy egyed vándorol be, és a bevándorlási idők Poisson-folyamat szerint történnek β paraméterrel. Továbbá, ha a folyamat kihalt, akkor csak bevándorlással jelenhet meg új egyed. Ha $X(t)$ jelöli a t időben jelenlévő egyedek számát, akkor $X(t), t \geq 0$ Markov-folyamat

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda i + \beta,\ \lambda_{i,i-1} = \mu i, \quad \text{ha } i \geq 0$$

rátákkal.

3. Markov-lánc időbeli fejlődése

1. <u>tétel</u>. Minden Markov-folyamathoz létezik egy A, $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$ mátrix úgy, hogy a $P(t)$ máttrix t-szerinti deriváltjára fennáll a következő két egyenlőség

$$P'(t) = AP(t) \quad \text{és} \quad P'(t) = P(t)A.$$

Az A mátrixot a Markov-folyamat generátorának nevezzük.

Az A megadható a beágyazott Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixával, és a $\lambda(i), i \in \mathcal{S}$ sorozat segítségével a következőképpen:

$$A_{ij} = \lambda(i) Q_{ij} \quad \text{ha } i \neq j \quad A_{ii} = -\lambda(i),\ i \in \mathcal{S}.$$

A $P'(t)$ derivált mátrix úgy értendő, hogy az ij-edik eleme $P_{ij}(t)'$.

A Markov-folyamat első két definíciójának ekvivalenciája miatt az A mátrixot felírhatjuk úgy is, hogy főátlón kívül megegyezik a rátákkal, a főátlóban pedig az egy sorban lévő ráták összegének a (-1)-szerese áll:

$$A_{ij} = \lambda_{ij}\ i \neq j, \quad A_{ii} = -\sum_{j \in \mathcal{S}} \lambda_{ij}.$$

4. Stacionárius eloszlás

5. definíció. Egy $\underline{\pi}$ $\mathcal{S}$-en éltermezett valószínűségeloszlást (sorvektor) stacionárius eloszlásnak hívunk, ha teljesül, hogy

$$\underline{\pi} P(t) = \underline{\pi}, \text{ minden } t \geq 0 \text{ esetén.}$$

Bebizonyítható a következő állítás.

3. <u>állítás</u>. Ha $\underline{\pi}$ stacionárius eloszlás, akkor a Markov-folyamat stacionárius folyamat, azaz minden n-re és minden $t_1, \ldots, t_n$ és $s > 0$ időre igaz az, hogy

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n)) \text{ eloszlása } = (X(t_1+s), \ldots, X(t_n+s)) \text{ eloszlása.}$$

A fejezet fő állítása a következő.

2. tétel. Legyen adott egy $X_t, t \geq 0$ folytonos idejű Markov-lánc. Tegyük fel, hogy az $X_n = X(T_n), n = 0, 1, \dots$ beágyazott Markov-lánc irreducibilis és visszatérő – ekkor azt mondjuk, hogy $X_t, t \geq 0$ irreducibilis és visszatérő.

(A) Ekkor az

$$\underline{y}P(t) = \underline{y}, \text{ minden } t \geq 0$$

sajátvektor egyenletrendszernek létezik pontosan egy megoldása, amely meghatározható az

$$\underline{y}A = \underline{0}$$

egyenlet megoldásával.

(B) Ha $\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i < \infty$, akkor létezik egyetlen $\underline{\pi}$ *stacionárius eloszlás* úgy, hogy minden eleme pozitív. Továbbá $\underline{\pi}$ felírható

$$\pi_j = \frac{y_j}{\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i}, \; j \in \mathcal{S}$$

alakban.

Ha $\sum_{i\in\mathcal{S}} y_i = \infty$, akkor *nem létezik* stacionárius eloszlás.

5. példa. Legyen adott egy Markov-folyamat az $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots\}$ állapottéren a következő rátákkal

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_i, \; \lambda_{i,i-1} = \mu_i, \quad \text{ha } i \geq 1$$

és $\lambda_{01} = \lambda_0$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a stacionárius eloszlást először fel kell írnunk a generátor mátrixot, A-t. Az előző fejezet alapján

$$A_{i,i+1} = \lambda_i \; A_{i,i-1} = \mu_i \; i \neq j, \quad A_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i); i \in \mathcal{S}.$$

A **??** példához hasonlóan felírható, hogy

$$\begin{aligned} -\lambda_0 y_0 + \mu_1 y_1 &= 0 \\ \lambda_{i-1} y_{i-2} - (\lambda_i + \mu_i) y_i + \mu_{i+1} y_{i+1} &= 0 \text{ if } i \geq 1 \end{aligned}$$

A megoldás is hasonló, egy rekurziót kapunk az y_i-kre:

$$y_{i+1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{i+1}} y_0, \; i \geq 0.$$

Létezik stacionárius eloszlás pontosan akkor, ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{i+1}} < \infty.$$

Ekkor a $\underline{\pi}$ stacionárius eloszlás a

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{i+1}} \pi_0, \; i \geq 0.$$

alakban írható.

6. példa. Az előző példa alapjána az $M/M/1$ rendszer esetén pontosan akkor létezik stacionárius eloszlás, ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+1} < \infty$$

ami akkor teljesül, ha

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Ekkor a stacionárius eloszlás

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \; i = 0, 1, \dots$$

alakú, azaz megegyezik egy $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ paraméterű geometriai eloszlással.

7. példa. Feladat: Számoljuk ki a stacionárius eloszlást a korábban megadott további példák esetében.

5. Ergod tétel folytonos idejű Markov-láncokra

Legyen $X(t), t \geq 0$ egy folytonos idejű Markov-lánc $\mathcal{S}$ állapottérrel. Továbbá, adott egy valós értékű f költségráta függvény az állapotokon értelmezve:

$$f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$

A "ráta" azt jelenti, hogy ha t ideig marad az i állapotban a folymat, akkor ennek költsége $f(i)t$. Ez alapján a t hosszú futás költsége

$$\int_0^t f(X(s))\,\mathrm{d}s.$$

Ekkor egy időegységer jutó átlagos költség

$$\frac{\int_0^t f(X(s))\,\mathrm{d}s}{t}.$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogyha a Markov-láncot végtelen sokáig futtatjuk, akkor mi lesz az egy lépésre jutó költség, vagy másként a *hosszútávú átlagos* költség:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t f(X(s))\,\mathrm{d}s}{t}.$$

A diszkrét esethez teljesen hasonló tétel mondható ki a kérdés megválaszolására.

3. tétel. Legyen $X(t), t \geq 0$ egy irreducibilis, visszatérő folytonos idejű Markov-lánc, amelynek létezik stacionárius eloszlása, $\underline{\pi}$. Továbbá legyen adott egy $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ költségráta függvény úgy, hogy a stacionárius eloszlás szerinti átlaga véges,

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} f(i)\pi_i < \infty.$$

Ekkor a hosszútávú átlagos költség egyszerűen számolható,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t f(X(s))\,\mathrm{d}s}{t} = \sum_{i\in\mathcal{S}} f(i)\pi_i.$$

8. példa. Tekintsük a 1. példában definiált Markov-láncot az $f(i) = ci$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ költségráta függvénnyel. Számoljuk ki, hogy hosszú távon mennyi az időegységre jutó átlagos költség. Az előző tétel szerint ehhez meg kell határoznunk a stacionárius eloszlást. Ezt a 6. példában megtettük. Tehát a működés költsége:

$$\sum_{i=0}^{\infty} ci \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = c\frac{\lambda}{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = c\frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = c\frac{\mu}{\mu - \lambda}.$$