4. feladatsor

Markov-láncok

2011. november 23.

Diszkrét idejű Markov-lánc

1. Tegyük fel, hogy $0 < a, b < 1$ és legyen
$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$
az átmenetvalószínűség mátrixa egy Markov-láncnak a $\{0,1\}$ állapottéren. Ekkor
$$P^n = (a+b)^{-1}\left\{\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}\right\}.$$
Hol jelenik meg a stacionárius eloszlás?

2. Az alábbi átmenetvalószínűség mátrixszal adott Markov-láncok esetén írjuk fel a gráfreprezentációt, határozzuk meg a periódust, visszatérőséget.
$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
   (a) Határozzuk meg a 1223 trajektória valószínűségét az 1. esetben.
   (b) Határozzuk meg a $\mathbf{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$ és a $\mathbf{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 4)$ valószínűségeket a 2. esetben.
   (c) Határozzuk meg a $\mathbf{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$ és a $\mathbf{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 4)$ valószínűségeket a 3. esetben.
   (d) Határozzuk meg a stacionárius eloszlást minden P_i esetén.

3. Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ esős nap és 30% eséllyel száraz nap, míg száraz napot 50% eséllyel követ esős és 50% eséllyel száraz nap.
   (a) Számítsuk ki, hosszú távon a napok hányadrésze esős (azaz a stacionárius eloszlást).
   (b) Tegyük fel, hogy ma esett. Mekkora a valószínűsége, hogy két nap múlva is esni fog? És annak, hogy 3 nap múlva esni fog?
   (c) Tegyük fel, hogy ma nem esett. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 60 nap múlva esni fog?
   (d) Esős napokon a közlekedés 2 Ft-ba kerül, nem esős napokon 1 Ft-ba. Mi a közlekedés hosszútávú átlagos költsége?

4. Egy dobókockát minden perc végén véletlenszerűen átfordítunk valamelyik szomszédos lapjára. Jelölje X_n az n-edik perc végén felül lévő számot. Gondoljuk meg, hogy X_n irreducibilis Markov-lánc. Mi az átmenetmátrix és a stacionárius eloszlás?

5. Egy bonyolult berendezést (gyár, nagyméretű számítógép-hálózat, társasház, stb.) kis szakértelemmel rendelkező személyzet felügyel. A berendezéssel számos probléma adódik folyamatosan, ami különbözőképpen befolyásolja a berendezés produktivitását. Az igazi szakértők hetente jönnek, és minden egyes alkalommal rendbe rakják a berendezést. Amikor megérkeznek, négy állapot valamelyikébe sorolják az aktuális szituációt:
1 – problémamentes; 2 – kis javítás; 3 – nagy javítás; 4 – katasztrófa.
Az állapotfelmérés és a rendberakás ára az egyes állapotokban:
10 (1), 30 (2), 100 (3), 1000 (4) pénzegység.
Az egymás utáni hetek állapotai modellezzük Markov-lánccal. Az átmenetvalószínűség mátrix a következő:
$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$
(az állapot sorrend 1,2,3,4 felülről lefelé, illetve balról jobbra).

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy kis javítás után két héttel (tehát egy hét regisztrációját kihagyjuk) problémamentes a rendszer?

(b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy problémamentes hetet három további problémamentes hét követ?

(c) Hosszú távon a felülvizsgálatok hány százalékában lesz a rendszer az i állapotban? Vizsgáljuk meg minden a négy állapotra.

(d) Mi a valószínűsége annak, hogy a 100. héten a rendszer az i állapotban van. Vizsgáljuk meg minden a négy állapotra.

(e) Mi a szakértők alkalmazásának hosszú távú átlagos költsége?

6. A Sóder kft. bővítette repertoárját. Most már kétféle munkát vállalnak: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,6 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 3 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 50% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 60% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha csak az egyik típusú munkára érkezik megrendelés, azt vállalják el. Ha nem érkezik megrendelés, tétlenül töltik a hónapot, és a bevételük 0. Melyiket érdemes választani, ha mindkettőre érkezik megrendelés? Azaz:

   (a) Modellezzük a Sóder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek akkor, ha az A munkát preferálják, amikor mindkettőre érkezik megrendelés? Mik az átmenetvalószínűségek akkor, ha a B munkát preferálják?

   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást mindkét esetben, majd ez alapján adjuk meg, mennyi a Sóder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon abban az esetben, ha az A, és abban az esetben, ha a B munkát választják.

Folytonos idejű Markov-lánc

7. Tekintsük a következő 3 modellt

   (a) *On-Off rendszer.* Ha egy gép működőképes, akkor $Exp(\lambda)$ ideig még működik. Ha elromlik, akkor a megjavítása $Exp(\mu)$ ideig tart, eddig nem működőképes. Amint megjavították, rögtön működni kezd. Javítási és működési periódusok minden tekintetben függetlenek egymástól.

   (b) Tekintsük az $M/M/2$ ($M/M/c$) kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. A $/2$ ($/c$) azt jelenti, hogy 2 (c) szerver szolgálja ki a csomagokat. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki.

   (c) Tekintsük az $M/M/1/B$ kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással, ahol B pozitív egész szám. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. A $/B$ azt jelenti, hogy összesen B igény lehet a rendszerben, az is beleszámít, amelyik éppen kiszolgálás alatt van. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki.

   (d) Tekintsük az $M/M/2/B$ kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással, ahol B pozitív egész szám. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki.

   Legyen $X(t)$ a t időben a rendszerben lévő csomagok száma. Az $(X(t), t \geq 0)$ folyamat folytonos idejű Marov-lánc.

   Minden modell esetén határozzuk meg az exponenciális órák paramétereit (2. definíció), határozzuk meg a beágyazott Markov lánc Q átmenetvalószínűség mátrixát és a $\lambda(i)$ tartózkodási idő paramétereket (1. definíció). Határozzuk meg a Markov-lánc generátorát (A).

Házi feladat: 5. (c),(d),(e); 7. (d)