4. feladatsor

Diszkrét idejű Markov-láncok

2010. november 22. és 24.

1. Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ esős nap és 30% eséllyel száraz nap, míg száraz napot 50% eséllyel követ esős és 50% eséllyel száraz nap.

   (a) Számítsuk ki, hosszú távon a napok hányadrésze esős (azaz a stacionárius eloszlást).

   (b) Tegyük fel, hogy ma esett. Mekkora a valószínűsége, hogy két nap múlva is esni fog? És annak, hogy 3 nap múlva esni fog?

   Megoldás: Legyen X_i = az idő az i-dik napon.

   $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc, hiszen az időjárás mindig csak az előző nap időjárásától függ. X-nek két állapota van: 0 – száraz; 1 – esős. Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

   az állapotok sorrendje: 0,1.

   Jelöljük $\pi = [\pi_0 \ \pi_1]$-gyel a Markov-lánc stacionárius eloszlását.

   (a) kérdésre a válasz a stacionárius eloszlás második koordinátája, π_1. Ugyanis az ergod tétel szerint:

$$\text{esős napok időaránya} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{I}\{X_0 = 1\} + \mathbf{I}\{X_1 = 1\} + \dots + \mathbf{I}\{X_{n-1} = 1\}}{n} = \pi_1.$$

   A stacionárius eloszlás az alábbi egyenletrendszer megoldása

$$\pi P = \pi \Leftrightarrow [\pi_0 \ \pi_1] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} = [\pi_0 \ \pi_1] \tag{1}$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1. \tag{2}$$

   Az elsőből azt kapjuk, hogy

$$0,5\pi_0 + 0,3\pi_1 = \pi_0 \qquad 0,5\pi_0 + 0,7\pi_1 = \pi_1$$

   azaz

$$\pi_1 = \frac{5}{3}\pi_0.$$

   Ezt a (2)-be helyettesítve:

$$\pi_0 + \frac{5}{3}\pi_0 = 1,$$

   amiből

$$\pi_0 = \frac{3}{8}, \qquad \pi_1 = \frac{5}{8},$$

   (b) kérdésre a válasz $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1)$, illetve $\mathbf{P}(X_3 = 1 \mid X_0 = 1)$.

   $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1)$ kiszámolásához ki kell számolni a 2 hosszú utak valószínűségét, és össze kell adni:

$$p_{1\to1\to1} + p_{1\to0\to1} = 0,7 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,64$$

   A kiszámoláshoz használhatjuk, hogy $\mathbf{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = [P^n]_{ij}$, tehát $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = \left[P^2\right]_{11} = 0,64$

   $\mathbf{P}(X_3 = 1 \mid X_0 = 1)$ meghatározásához ki kell számolni a 3 hosszú utak valószínűségét, és össze kell adni. Vagy $\mathbf{P}(X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = \left[P^3\right]_{11}$

2. Egy dobókockát minden perc végén véletlenszerűen átfordítunk valamelyik szomszédos lapjára. Jelölje X_n az n-edik perc végén felül lévő számot. Gondoljuk meg, hogy X_n irreducibilis Markov-lánc. Mi az átmenetmátrix és a stacionárius eloszlás?

   Megoldás: Az átmenet valószínűség mátrix az 1,2,3,4,5,6 állapotokon:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

   A stacionárius eloszlás: $\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

3. Egy bonyolult berendezést (gyár, nagyméretű számítógép-hálózat, társasház, stb.) kis szakértelemmel rendelkező személyzet felügyel. A berendezéssel számos probléma adódik folyamatosan, ami különbözőképpen befolyásolja a berendezés produktivitását. Az igazi szakértők hetente jönnek, és minden egyes alkalommal rendbe rakják a berendezést. Amikor megérkeznek, négy állapot valamelyikébe sorolják az aktuális szituációt: 1 – problémamentes; 2 – kis javítás; 3 – nagy javítás; 4 – katasztrófa.
   Az állapotfelmérés és a rendberakás ára az egyes állapotokban:
   10 (1), 30 (2), 100 (3), 1000 (4) pénzegység.

   Az egymás utáni hetek állapotai Markov-lánccal modellezhetőek. Egyrészt, az aktuális állapot mindig csak az előző hét állapotától függ. Másrészt, a problémák véletlenül merülnek fel, továbbá a folyamatosan ott lévő személyzet is képes véletlen nagyságú mértékben megjavítani a berendezést. Az egyes állapotokból a következő állapotba való átmenet mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (az állapot sorrend 1,2,3,4 felülről lefelé, illetve balról jobbra).

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy kis javítás után két héttel (tehát egy hét regisztrációját kihagyjuk) problémamentes a rendszer?
   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy problémamentes hetet három további problémamentes hét követ?
   (c) Hosszú távon a felülvizsgálatok hány százalékában lesz a rendszer az i állapotban? Vizsgáljuk meg minden a négy állapotra.
   (d) Mi a szakértők alkalmazásának hosszú távú átlagos költsége?

   Megoldás:
   Legyen X_n az n-dik állapotfelmérés eredménye.

   (a) válasz: $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = \left[P^2\right]_{21}$ = az összes 2 hosszú út valószínűsége, amelyik 2-ből 1-be vezet$= p_{2\to1\to1} + p_{2\to2\to1} + p_{2\to3\to1} + p_{2\to4\to1} = 0,2 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,25$.

   (b) válasz: $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11}p_{11}p_{11} = 0,4^3 = 0,64$.

   (c) válasz: π_i tetszőleges i-re, ahol $\pi = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4]$ az $(X_0, X_1, \dots)$ Markov-lánc stacionárius eloszlása. π meghatározásához, a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\pi P = \pi$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1.$$

   Az jön ki, hogy $[\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4] = \begin{bmatrix} \frac{156}{653} & \frac{312}{653} & \frac{116}{653} & \frac{66}{653} \end{bmatrix} \approx [24,35\%\ 47,78\%\ 17,76\%\ 10,11\%]$.

   (d) válasz: az ergod tétel alapján $10\pi_1 + 30\pi_2 + 100\pi_3 + 1000\pi_4 = \frac{88550}{653} = 135,6$.

4. Egy építőipari cég minden évben 3 alvállalkozó közül egynek oszt ki egy bizonyos típusú munkát. Egy évben az alvállalkozó neve csak az előző évben kiválasztott alvállalkozó nevétől függ. Az alábbi mátrixban össze van gyűjtve, hogy ha az n. évben az i sorindexű alvállalkozót választották, akkor az $(n+1)$-edik évben milyen valószínűséggel választják a j oszlopindexű vállalkozót.

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/4 & 1/12 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

A) Ha az első évben az első alvállalkozót $\frac{1}{3}$ valószínűséggel választják ki, akkor mi a valószínűsége, hogy az első és a második évben is az első kapja meg a munkát?

Megoldás: $\mathbf{P}(X_0 = 1, X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_0 = 1)p_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

B) Ha az első évben az első alvállalkozó kapja meg a munkát, akkor mi a valószínűsége, hogy a harmadik évben megint az első alvállalkozó kapja meg a munkát (a második évről nem tudunk semmit)?

Megoldás: $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) =?$ Az 1. feladat (b) részéhez hasonlóan kell megoldani.

C) Tegyük fel, hogy az első évben az i. alvállalkozó kapja meg a munkát. Mi a valószínűsége, hogy további n egymás követő évben nem választanak mást?

Megoldás: $\mathbf{P}(X_n = i, X_{n-1} = i, \ldots, X_1 = i \mid X_0 = i) = p_{ii}^n$

D) Hosszú idő alatt milyen gyakorisággal választják ki az első alvállalkozót?

Megoldás: A válasz az ergod tétel szerint π_1, ahol $\pi = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3]$ a stacionárius eloszlás. Az jön ki, hogy $\pi = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3] = \left[\frac{17}{26}\ \frac{8}{26}\ \frac{1}{26}\right]$

E) Az 1., 2., 3. alvállalkozó választásának éves költsége sorrendben 50 mFt, 40 mFt, 45 mFt. Határozzuk meg, hogy hosszú távon mennyit költ a cég az alvállalkozóra.

Megoldás: A válasz az ergod tétel szerint: $50\pi_1 + 40\pi_2 + 45\pi_3 = \frac{1215}{26}$ mFt

F) Mi a valószínűsége, hogy elegendően hosszú idő múlva kétszer egymás után ugyanazt az alvállalkozót választják?

Megoldás: $p_{11}\pi_1 + p_{22}\pi_2 + p_{33}\pi_3$.

5. Tekintsünk egy tárolót c kapacitással, ahol c pozitív egész. Minden pozitív egész n esetén az $[n, n+1)$ időintervallumban A_{n+1} véletlen egész értékű beérkezés történik a tárolóba. Ha a tárolt mennyiség a beérkezéssel együtt túlnő a tároló kapacitásán, akkor túlcsordulás fordul elő. Az $[n, n+1)$ intervallum végén m egységet eltávolítanak a tárolóból, ahol $m < c$. Ha a tárolóban m egységnél kevesebbet tárolnak, akkor az egész tárolót kiürítik. A $0, 1, \ldots$ időpontokban a tárolóban lévő mennyiség az **ürítés előtt** legyen $X_0, X_1, \ldots$, melyek egész értékű valószínűségi változók.

Tegyük fel, hogy $A_0, A_1, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínű változók, és függetlenek X_0-tól. Mutassuk meg, hogy fennáll a következő rekurzió:

$$X_{n+1} = [(X_n - m)_+ + A_{n+1}] \wedge c,$$

ahol $a \wedge b$ jelöli két szám, a és b, minimumát.

A $0, 1, \ldots$ időpontokban a tárolóban lévő mennyiség az **ürítés után** legyen $Y_0, Y_1, \ldots$, melyek egész értékű valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy fennáll a következő rekurzió:

$$Y_{n+1} = \{[(Y_n + A_{n+1}) \wedge c] - m\}_+ .$$

Határozzuk meg az $\{X_n\}$ és az $\{Y_n\}$ folyamatok átmenetvalószínűségi mátrixait. (Legyen $q_n = \mathbf{P}(A_1 = n)$, $a_{\leq n} = \mathbf{P}(A_1 \leq n)$, és $a_{\geq n} = \mathbf{P}(A_1 \geq n)$.)

6. Jelölje $\mathcal{T}$ egy Markov-lánc átmeneti állapotainak halmazát. Ha $i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{T}^C$, legyen $u_{ij} = \mathbf{P}(X_\alpha = j \mid X_0 = i)$, ahol α az első időpont, amikor a Markov-lánc egy visszatérő állapotba lép. A teljes valószínűség tételt használva mutassuk meg, hogy

$$u_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{T}} Q_{ik} u_{kj} + p_{ij},$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$U = QU + R.$$

Ebből következik, hogy ha az $I - Q$ mátrixnak van inverze, akkor U kiszámolható:

$$U = (I - Q)^{-1} R.$$

7. Tekintsük a 3. feladatban bemutatott modellt. Mi a valószínűsége annak, hogy a rendszer előbb lép az 1-es állapotba, mint a 4-esbe, ha a 2-esből indult?

Megoldás: Az eredeti,

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

átmenetvalószínűség mátrixot megváltoztatjuk úgy, hogy az elnyelő állapotok az 1. és a 4., és az átmeneti állapotok a 2. és a 3. legyenek. Azokat az átmenetvalószínűségeket, amelyeket nem érint ez a változás meghagyjuk. Az állapot sorrend az új Markov-láncban: 2,3,1,4. Tehát az átmenet valószínűség mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az átmeneti állapotokon történő bolyongást a Q mátrix írja le, ahol

$$Q = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,1 \\ -0,3 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

$I - Q$ inverze:

$$(I-Q)^{-1} = \frac{1}{0,21} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Az R mátrix:

$$R = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Innen:

$$U = (I-Q)^{-1}R = \frac{1}{0,21} \begin{bmatrix} 0,12 & 0,09 \\ 0,06 & 0,15 \end{bmatrix}.$$

Ennek a bal felső eleme, $\frac{0,12}{0,21} \approx 0,57$, fejezi ki azt a valószínűséget, hogy a 2-esből indulva az 1-esben nyelődik el, azaz az eredeti Markov-láncban, előbb ér az 1-be, mint a 4-be.

8. Használjuk a 6. feladat jelöléseit. Legyen $i \in \mathcal{T}$ és

$$M_i = \mathbf{E}(\alpha | X_0 = i).$$

Mutassuk meg a teljes várható érték segítségével, hogy $M_i = 1 + \sum_{j \in T} p_{ij} M_j$, $i \in \mathcal{T}$.

9. A Sóder kft. bővítette repertoárját. Most már kétféle munkát vállalnak: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,6 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 3 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 50% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 60% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha csak az egyik típusú munkára érkezik megrendelés, azt vállalják el. Ha nem érkezik megrendelés, tétlenül töltik a hónapot, és a bevételük 0. Melyiket érdemes választani, ha mindkettőre érkezik megrendelés? Azaz:

   (a) Modellezzük a Sóder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek akkor, ha az A munkát preferálják, amikor mindkettőre érkezik megrendelés? Mik az átmenetvalószínűségek akkor, ha a B munkát preferálják?

   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást mindkét esetben, majd ez alapján adjuk meg, mennyi a Sóder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon abban az esetben, ha az A, és abban az esetben, ha a B munkát választják.

Megoldás: Az állapotok:

1 – tétlenül töltött hónap kezdődik

2 – „A” munkát vállaltak

3 – egy „B” munka első hónapja kezdődik

4 – egy „B” munka második hónapja kezdődik

Annak a valószínűsége, hogy nem érkezik munka egy hónapban: $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$, ahol A esemény jelöli azt, hogy érkezett A munkára megrendelés, B esemény jelöli azt, hogy érkezett B munkára megrendelés egy hónapban. A és B munkák érkezésének függetlensége miatt: $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B}) = (1-0,5)(1-0,6) = 0,2$.

Legyen P_A annak a Markov-láncnak az átmenetvalószínűség mátrixa, amelyben a vállalkozó ha mindkét típusú munka érkezik, akkor az A munkát preferálja. Hasonlóan legyen P_B. Az alábbi átmenetvalószínűség mátrixokban az állapotsorrend 1,2,3,4 balról jobbra és felülről lefelé.

$$P_A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_B = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$$

A stacionárius eloszlásokat kiszámolva

$$\pi_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \qquad \pi_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

adódik. A bevétel függvény: $C(1) = 0$, $C(2) = 1,6$, $C(3) = 1,5$, $C(4) = 1,5$.

A hosszútávú költségek

$$C(1)\pi_{A,1} + C(2)\pi_{A,2} + C(3)\pi_{A,3} + C(4)\pi_{A,4} = 1,325 \qquad C(1)\pi_{B,1} + C(2)\pi_{B,2} + C(3)\pi_{B,3} + C(4)\pi_{B,4} \approx 1,3077.$$

Tehát hosszútávon megéri az A munkát választani, ha mindkettőre érkezik megrendelés.