1. házi feladat

Ismétlés

2010. október 28.

1. Egy céllövöldében hat puska van. Közülük három olyan, hogy azokkal 0,5 valószínűséggel találunk célba, eggyel a találati valószínűség 0,7, kettővel pedig 0,8. Találomra kiválasztunk egy puskát, majd lövünk. Mekkora a valószínűsége, hogy célba találunk?

   Megoldás:

   Legyen A_i = az i-dik 0,5 találat valószínűségű puskával lő, $i = 1, 2, 3$.

   Legyen B_j = az j-dik 0,8 találat valószínűségű puskával lő, $j = 1, 2$.

   Legyen C_1 = az egyetlen 0,7 találat valószínűségű puskával lő.

   Mivel egyenletesen véletlenül választunk: $\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(B_j) = \mathbf{P}(C_1) = \frac{1}{6}$.

   Legyen T = a lövés célba talál. A találat valószínűség jelentése: $\mathbf{P}(T \mid A_i) = 0,5$, $\mathbf{P}(T \mid B_j) = 0,8$, $\mathbf{P}(T \mid C_1) = 0,7$.

   A teljes valószínűség tételét használva:

   $$\mathbf{P}(T) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(T \mid A_i)\mathbf{P}(A_i) + \sum_{j=1}^{2} \mathbf{P}(T \mid B_j)\mathbf{P}(B_j) + \mathbf{P}(T \mid C_1)\mathbf{P}(C_1).$$

   Behelyettesítés után kapjuk, hogy ez az összeg $\frac{19}{30} \approx 0,633$.

2. 3-szor feldobunk egy szabályos pénzérmét. Ha k fejet kaptunk, akkor egy dobozba k piros golyót, $4 - k$ kéket rakunk, majd addig húzunk a golyók közül visszatevéssel, ameddig kihúzzuk az első pirosat. Jelölje Y a húzások számát, és X a fejek számát. Határozzuk meg Y várható értékét a teles várható érték tétel segítségével.

   Mi lesz a húzások számának várható értéke, ha az első kék golyó kihúzásánál állunk meg?

   Megoldás:

   Az első piros golyóig húzunk

   A teljes várható érték tételt használva:

   $$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{3} \mathbf{E}(Y \mid X = k)\mathbf{P}(X = k). \tag{1}$$

   Mivel $X \sim \mathit{Binom}\left(3, \frac{1}{2}\right)$, ezért $\mathbf{P}(X = k) = \binom{3}{k}\frac{1}{8}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Ha $k = 1, 2, 3$, akkor Y eloszlása feltéve $X = k$ geometriai eloszlású $\frac{k}{4}$ paraméterrel (siker valószínűséggel), tehát $\mathbf{E}(Y \mid X = k) = \frac{4}{k}$. Ha $k = 0$, akkor soha nem tudunk pirosat húzni, ezért $\mathbf{P}(Y = \infty) = 1$, így $\mathbf{E}(Y \mid X = 0) = \infty$. Ekkor (1)-ből következik, hogy $\mathbf{E}(Y) = \infty$.

Az első kék golyóig húzunk

Legyen $Z =$ az első kék golyó kihúzásának sorszáma.

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=0}^{3} \mathbf{E}(Z \mid X = k)\mathbf{P}(X = k). \tag{2}$$

Mivel már, $\mathbf{P}(X = k)$ valószínűségeket már fent kiszámoltuk, foglalkozzunk csak a feltételes várható értékekkel. Hasonlóan, mint az első részben, $k = 0, 1, 2, 3$ esetén Z eloszlása feltéve $X = k$ geometriai eloszlású $\frac{4-k}{4}$ paraméterrel, tehát $\mathbf{E}(Z \mid X = k) = \frac{4}{4-k}$. Ezeket behelyettesítve (2)-be azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}Z = 1,875.$$