2. házi feladat

Generátorfüggvény, elágazó folyamat

2010. november 4.

1. Egy sorbanállási rendszerben a pufferben sorban álló csomagok kiszolgálási ideje független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata: $X_1, X_2, \ldots$ (X_i az i-ik csomag kiszolgálási ideje). A kiszolgálási rendszer stabil állapotban van, azaz létezik egy valószínűségi változó N, amely egy tetszőleges újonnan beérkező csomag beérkezése után leírja, hogy hány csomag várakozik a rendszerben. Ekkor

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

időt kell várni az újonnan beérkező csomag befejezéséig. Tegyük fel, hogy N független a kiszolgálási időktől. Határozzuk meg Y szórásnégyzetét. Pontosabban a feladat az, hogy bizonyítsuk a következő egyenlőséget

$$D^2(Y) = D^2(N) \cdot \mathbf{E}^2(X_1) + \mathbf{E}(N) \cdot D^2(X_1).$$

Segítség: használjuk fel a generátor függvényekről szerzett tudást: határozzuk meg a várható értéket és a szórásnégyzetét a generátor függvény segítségével, azaz $\mathbf{E}Y = G'_Y(1)$ és $D^2(Y) = G''_Y(1) + G'_Y(1) - [G'_Y(1)]^2$. Használjuk továbbá a véletlen összeg generátorfüggvényének meghatározásáról szóló állítást.

1. Megoldás: Használjuk a következőt

$$D^2(Y) = G''_Y(1) + G'_Y(1) - [G'_Y(1)]^2. \tag{1}$$

Számoljuk ki a szereplő deriváltakat:

$$G'_Y(1) = \mathbf{E}N\mathbf{E}X \tag{2}$$

$$G''_Y(z) = G''_N(G_X(1))[G_X(z)]^2 + G'_N(G_X(z))G''_X(z)$$

$$G''_Y(1) = G''_N(1)[G_X(1)]^2 + G'_N(1)G''_X(1) = (\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}N)[\mathbf{E}X]^2 + \mathbf{E}N(\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}X). \tag{3}$$

A (2) és (3) összefüggésket megfelelően behelyettesítve a (1) egyenlőségbe, majd megfelelően egyszerűsítve és átrendezve kapjuk az állításban szereplő összefüggést.

2. megoldás: Alkalmazzuk a teljes várható érték tételt $\mathbf{E}Y$ és $\mathbf{E}(Y^2)$ kiszámítására. Álljon a teljes eseményrendszer az $\{N = 0\}, \{N = 1\}, \ldots, \{N = k\}, \ldots$ eseményekből.

2. Tegyük fel, hogy egy végtelennek tekinthető számítógép populációban ha egy számítógép megfertőződik egy bizonyos típusú kártékony programmal, akkor a következő 1 nap során p valószínűséggel kiirtják, így nem fertőz meg mást. $(1-p)p$ valószínűséggel nem irtják ki, de nem is fertőz. Továbbá $(1-p)^k p$ valószínűséggel $k-1$ addig nem fertőzött gépet fertőz meg, és nem is irtják ki, ahol $k = 2, 3, 4, \dots$ értékeket veheti fel. Tehát, ha X-szel jelöljük, hogy hány fertőzött géppel járul hozzá a következő napi fertőzött gépek számához egy fertőzés, akkor X eloszlása

$$\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p,\ k = 0, 1, 2, \dots.$$

Tegyük fel, hogy minden megfertőzött számítógép az összes többi fertőzött számítógéptől függetlenül „szaporodik”.

Legyen p értéke $\frac{1}{4}$. Modellezzük az egyes napokon a fertőzött számítógépek számát elágazó folyamattal. Tegyük fel, hogy az első napon egy fertőzött gép van. Írjuk fel az utódeloszlás generátorfüggvényét. (Vegyük észre, hogy az utódeloszlás „pesszimista” geometriai eloszlás.)

(a) Számítsuk ki, mennyi a fertőzött számítógépek várható száma 30 nap múlva.

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy sohasem sikerül kiirtani a kártevőt?

Megoldás: Az (a) kérédesre a válasz $\mathbf{E}\mathcal{Z}_{30} = m^{30}$, ahol m az utódeloszlás várható értéke, jelen esetben ez a geometriai eloszlás várható értéke, $\mathcal{Z}_n$ pedig az n-dik generáció egyedeinek a száma. Tudjuk, hogy ha $X \sim Geom(p)$, akkor várható értéke $\frac{1-p}{p}$, azaz jelen esetben $m = \frac{1-1/4}{1/4} = 3$. Thát a válasz, 3^{30}

A (b) kérdésre a válasz a $\mathbf{P}$(minden generációban(napon) van legalább egy fertőzött egyed) $= 1-\mathbf{P}$(véges nap alatt kihalnak a fertőzött egyedek). Ez utóbbi valószínűség pedig a véges generáció alatti kihalás valószínűsége. Tudjuk, hogy ez a $P(z) = z$ fixpont egyenlet legkisebb megoldása, ahol $P(z)$ az utódeloszlás generátorfüggvénye. Jelen esetben $P(z) = \frac{p}{1-(1-p)z} = \frac{1}{4-3z}$. Így a kihalás valószínűségéhez meg kell határozni a

$$\frac{1}{4-3z} = z$$

egyenlet megoldásait. Átrendezés után, egy másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai $z_1 = 1$ és $z_2 = \frac{1}{3}$. Tehát a válasz:

$\mathbf{P}$(minden nap van legalább egy fertőzött egyed) $= \frac{2}{3}$.