4. házi feladat

Markov-láncok

2010. november 18.

1. Egy bonyolult berendezést (gyár, nagyméretű számítógép hálózat, társasház, stb.) kis szakértelemmel rendelkező személyzet felügyel. A berendezéssel számos probléma adódik folyamatosan, ami különbözőképpen befolyásolja a berendezés produktivitását. Az igazi szakértők hetente jönnek, és minden egyes alkalommal rendbe rakják a berendezést. Amikor megérkeznek, négy állapot valamelyikébe sorolják az aktuális szituációt:
   1 - problémamentes; 2 - kis javítás; 3 - nagy javítás; 4 - katasztrófa.
   Az állapot felmérés és a rendberakás ára az egyes állapotokban:
   10 (1), 30 (2), 100 (3), 1000 (4) pénzegység.

   Az egymás utáni hetek állapotai Markov-lánccal modellezhetőek. Egyrészt, az aktuális állapot mindig csak az előző hét állapotától függ. Másrészt, a problémák véletlenül merülnek fel, továbbá a folyamatosan ott lévő személyzet is képes véletlen nagyságú mértékben megjavítani a berendezést. Az egyes állapotokból a következő állapotba való átmenet mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (az állapot sorrend 1,2,3,4 felülről lefelé, illetve balról jobbra).

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy kis javítás után két héttel (tehát egy hét regisztrációját kihagyjuk) problémamentes a rendszer?

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy problémamentes hetet három további problémamentes hét követ?

   (c) Hosszútávon a felülvizsgálatok hány százalékában lesz a rendszer az i állapotban? Vizsgáljuk meg minden a négy állapotra.

   (d) Mi a szakértők alkalmazásának hosszútávú átlagos költsége?

Megoldás:

Legyen X_n az n-dik állapotfelmérés eredménye.

(a) válasz: $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = [P^2]_{21} =$ az összes 2 hosszú út valószínűsége, amelyik 2-ből 1-be vezet$= p_{2\to1\to1} + p_{2\to2\to1} + p_{2\to3\to1} + p_{2\to4\to1} = 0,2 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,25$.

(b) válasz: $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11}p_{11}p_{11} = 0,4^3 = 0,64$.

(c) válasz: π_i tetszőleges i-re, ahol $\pi = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4]$ az $(X_0, X_1, \dots)$ Markov-lánc stacionárius eloszlása. π meghatározásához, a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\pi P = \pi$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1.$$

Az jön ki, hogy $[\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4] = \left[\frac{156}{653}\ \frac{312}{653}\ \frac{116}{653}\ \frac{66}{653}\right] \approx [24,35\%\ 47,78\%\ 17,76\%\ 10,11\%]$.

(d) válasz: az ergod tétel alapján $10\pi_1 + 30\pi_2 + 100\pi_3 + 1000\pi_4 = \frac{88550}{653} = 135,6$.