Tömegkiszolgálás

ZH megoldások **és pontozás**, 2020 tavasz, 2020.05.05, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Megjegyzések tudni vágyóknak:

- Az 1. feladat „kupongyűjtő probléma” („coupon collector problem”) néven ismert.
- A 2. feladat az „Ehrenfest urnamodell” diszkrét idejű változata.

Pontozás általában:

- Minden feladat 9 pontot ér.
- A részpontszámok részletezve vannak az egyes megoldások után.
- Fő szabály: Ha valaki rossz irányba indul el – pl. hibásan ismeri fel az alkalmazandó modellt – és aztán a rossz irányban sok szép dolgot kiszámol, azért nem jár pont.
- Különösen vonatkozik ez arra, ha valaki olyat számol ki, ami a helyes megoldáshoz nem kell – pl. a 2-es feladatban a stacionárius eloszlást.

1. Pistike, Jancsika és Móricka matricákat gyűjt, amiket a csokihoz adnak a boltban. Hatféle matrica van, minden csokihoz egyet adnak, mindegyiket azonos valószínűséggel (az előzményektől függetlenül).

   a.) Pistikének már három féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy négyféle legyen?

   b.) Jancsikának már k-féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy $(k+1)$-féle legyen? (Itt $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$)

   c.) Móricka csak most kezdi a gyűjtést. Mennyi a teljes matrica-készlet kigyűjtéséhez kibontandó csokik számának várható értéke és szórása?

   Megoldás:

a.) Mindaddig, amig 3 matricája van, ~~$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ valsggel~~

minden lépésben $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ val.séggel kap új fajtát.

Vagyis az első sikerhez szükséges próbálkozások száma

$\sim Geom(\frac{1}{2})$. Ennek várható értéke $\mathbb{E}(Geom(\frac{1}{2})) = \underline{\underline{2}}$

b.) Ugyanígy, ha k matricája van, akkor a siker-valószínűség

$\frac{6-k}{6}$, a szükséges próbálkozások száma $\sim Geom\left(\frac{6-k}{6}\right)$,

ennek várható értéke $\mathbb{E}\left(Geom\left(\frac{6-k}{6}\right)\right) = \frac{6}{6-k}$

c.) Legyen X_k a $(k+1)$-edik matrica megszerzéséhez szük-

séges próbálkozások száma onnantól kezdve, hogy a

k-adik már megvan, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

A b.) rész szerint $X_k \sim Geom\left(\frac{6-k}{6}\right)$, ~~és ráadásul~~

~~független~~ $\mathbb{E}X_k = \frac{6}{6-k}$

A kibontandó csokik teljes száma $S = X_0 + X_1 + \ldots + X_5$.

• Ennek várható értéke

$$\boxed{\mathbb{E}S = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{E}X_k} = \sum_{k=0}^{5} \frac{6}{6-k} = 6\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right] = 2.45 \cdot 6 = \boxed{14.7}$$

• Az X_k-k ráadásul függetlenek is, ezért

$$Var\, S = \sum_{k=0}^{5} Var\, X_k, \text{ ahol } Var\, X_k = \frac{1 - \frac{6-k}{6}}{\left(\frac{6-k}{6}\right)^2} = \frac{6k}{(6-k)^2}$$

$$\Rightarrow Var\, S = 6\left[\frac{0}{6^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{1^2}\right] = 38.99 \Rightarrow \boxed{DS \approx 6.24}$$

Pontozás:

a.) 3 pont – ebből 1 a geometriai eloszlás felismerése

b.) 1 pont

c.) 4 pont, ebből

- 1 pont annak felismerése, hogy val.változók összegéről van szó
- 1 pont a várható érték kiszámolása
- 2 pont a szórás kiszámolása – ebből 1 a függetlenség megemlítése

2. Egy udvaron két kutya van, egymáshoz közel (Anna és Bella), rajtuk összesen 3 bolha. A bolhák az órát nézik, és minden percben, az előzményektől függetlenül, kiválasztanak maguk közül 1-et, aki átugrik az aktuális helyéről a másik kutyára – miközben a többiek maradnak, ahol voltak.

   Kezdetben mind a 3 bolha Bellán van. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 120 perc elteltével minden bolha Annán lesz?

   Megoldás:

Az Annán lévő bolhák száma minden percben pont 1-gyel változik. Kezdetben 0, ami pár~~atlan~~os, így 120 perc elteltével ismét biztosan pár~~atlan~~os, és nem lehet 3. Vagyis a keresett val. szg nulla.

Avagy: legyen X_n az Annán lévő bolhák száma n perc elteltével; X_n Markov lánc gráf-reprezentációja.

Látszik, hogy X_n periodikus $d=2$ periódussal.

3-ból 0-ba eljutni csak páratlan lépésben lehet, így

$$\mathbb{P}(X_{120}=3 \mid X_0=0)=0.$$

Pontozás:

- 1 pont a Markov átmenetmátrix felírása vagy a gráf-reprezentáció felrajzolása
- 7 pont annak felismerése, hogy periodikus
- 1 pont a válasz

3. Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = z^5 e^{z-c}$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

a.) Mennyi a c konstans értéke?

b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 100)$ valószínűség?

Megoldás:

a.) Minden generátor függvényre $g(1)=1$, vagyis

$g(1) = 1^5 e^{1-c} = 1$, amiből $\underline{c=1}$ $\Rightarrow g(z) = z^5 e^{z-1}$

b.) $g'(z) = 5z^4 e^{z-1} + z^5 e^{z-1}$,

amiből ~~$\mathbb{E}X = g'(1) = 5+1 = 6$~~

$\mathbb{P}(X=0) = g'(0) = \underline{0}.$

c.) $\underline{\text{1. megoldás:}}$ $g(z)$ sorfejtésével: $g(z) = e^{-1} z^5 e^z$ ← jó ismerős

konstans z-hatvány

ebből $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^k}{k!} + \dots$

$\Rightarrow z^5 e^z = z^5 + z^6 + \frac{z^7}{2} + \frac{z^8}{3!} + \dots + \frac{z^{k+5}}{k!} + \dots$

$\Rightarrow g(z) = e^{-1} z^5 + e^{-1} z^6 + \frac{e^{-1}}{2} z^7 + \frac{e^{-1}}{3!} z^8 + \dots + \frac{e^{-1}}{95!} z^{100} + \dots$

amiből $\boxed{\mathbb{P}(X=100) = \frac{e^{-1}}{95!}} \simeq 3.6 \cdot 10^{-149}$, kicsi.

$\underline{\text{2. megoldás:}}$ Legyen $X = 5 + U$, ahol $U \sim \mathrm{Poi}(1)$.

Ekkor U generátorfüggvénye e^{z-1}, ~~vagyis~~ amiből

X generátorfüggvénye éppen a mi $g(z)$-nk.

Ebből $\mathbb{P}(X=100) = \mathbb{P}(U=95) = \underline{\frac{e^{-1}}{95!}}$.

Pontozás:

a.) 3 pont

b.) 3 pont, ebből 1-et ér a $P(X = 0) = g'(0)$ képlet

c.) 3 pont, de önmagában a $P(X = 100) = g^{(100)}(0)$-ért nem jár pont.

4. Józsi bácsi minden este feldob egy szabályos érmét, és ha az eredmény fej, akkor megiszik egy üveg bort – feltéve persze, hogy van a kamrában bor. Cserébe minden délelőtt elgurít egy szabályos dobókockát, és ha az eredmény 6-os, akkor elmegy a boltba, hoz K üveg bort és beteszi a kamrába. (Itt $K \in \{1, 2, 3, \dots\}$.) Hosszú távon átlagosan hány delet tölt Józsi bácsi kamrájában egy üveg bor? (A választ adjuk meg K függvényében!)

   Megoldás:

Józsi ~~Kam~~ bácsi kamrája egy kiszolgálási sor, a kiszolgálás a megivás. Legyen X_n a borok száma a kamrában az n-edik napon délben.

A kérdés az átlagos késleltetés.

Ez az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ evolúciós egyenlet szerint fejlődik, ahol • V_{n+1} = az n-edik este megivott borok száma

$$V_n \sim B\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \mathbb{E}V = \frac{1}{2}$$

• Y_{n+1} = az $(n+1)$-edik délelőtt érkező borok száma: $Y_n = \begin{cases} 0 & \frac{5}{6} \text{ val. sséggel} \\ K & \frac{1}{6} \sim \end{cases}$

amiből $\mathbb{E}Y_1 = \frac{K}{6}$, $\mathbb{E}Y_1^2 = \frac{K^2}{6}$, $\mathrm{Var}\,Y_1 = \frac{K^2}{6} - \left(\frac{K}{6}\right)^2 = K^2\frac{5}{36}$.

A rendszer akkor stabil, ha $\mathbb{E}V > \mathbb{E}Y$, vagyis $K<3$.

Így a sorhossz stac. eloszlásának várható értéke a M-eg-jegyzet 2. oldalának tétele szerint

$$\mathbb{E}X^{stac} = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{E}Y(1-\mathbb{E}Y) + \mathrm{Var}\,Y}{2(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)} = \dfrac{\frac{K}{6}\left(1-\frac{K}{6}\right) + K^2\frac{5}{36}}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{K}{6}\right)}, & \text{ha } K<3 \\ \infty, & \text{ha } K \geq 3 \end{cases}$$

Vagy rövidebben: $\mathbb{E}X^{stac} = \begin{cases} \frac{5}{12}, & \text{ha } K=1 \\ \frac{7}{3}, & \text{ha } K=2 \\ \infty, & \text{ha } K\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{D} = \begin{cases} 2.5, & \text{ha } K=1 \\ 7, & \text{ha } K=2 \\ \infty, & \text{ha } K\geq 3 \end{cases}}$

[Ezután a Little formulából az átlagos késleltetés $\bar{D} = \dfrac{\mathbb{E}X^{stac}}{\mathbb{E}Y}$]

Pontozás:

- 1 pont a modell felismerése, a jelölések helyes bevezetése
- 1 pont a V és Y eloszlásának felírása
- 1 pont a V és Y várható értékének kiszámolása
- 1 pont az Y szórásnégyzetének kiszámolása
- 2 pont a képletek helyes alkalmazása a stabil esetre
- 2 pont a stabilitás vizsgálata
- 1 pont a teljes válasz, ami a stabil és instabil esetet is fedi.

5. Jancsi egy listáról ZH-eredményeket diktál Juliskának, aki a Neptunba írja őket. Ciklusokban dolgoznak: egy ciklus során

   - Jancsi 5 másodperc alatt bemond egy nevet a listáról,
   - majd lediktálja 4 hallgató pontszámát, 5 másodpercenként egyet. (Vagyis a négyből három hallgató nevét Jancsi nem mondja be: bízik benne, hogy helyes sorrendben vannak a listán.)
   - Ez után Juliska szintén 5 másodperc alatt visszajelez, hogy mindent jól értett-e.

   (Így az egész ciklus 5+20+5=30 másodpercig tart.) Ha Juliska mindent értett, akkor mennek tovább, ha viszont nem, akkor újrakezdik a ciklust.

   Juliska a neveket és az egyes pontszámokat is 90% valószínűséggel érti, egymástól függetlenül.

   a.) Percenként hány pontszámot tudnak így beírni hosszú távon?

   b.) Lehetne gyorsabban haladni, ha Jancsi nem 4-esével diktálná az eredményeket? Ha igen, hányasával lenne optimális?

   Megoldás:

Jancsi a pontszámokat Stop-and-Wait protokoll szerint diktálja a zajos csatornán. ~~Az időegység~~ 1 bitnek megfelel egy név vagy egy pontszám.

~~Az időegység~~

A diszkrét időegység $t_0 = 5\,s$,

az adatcsomag mérete $N=4$

a kísérő bitek száma $M=1$

a késleltetés szintén $5\,s$, diszkrét időben mérve $K=1$.

A bithiba-valószínűség $p_b = 0.1$

a.) A 12. előadásjegyzet 9. oldala szerint az átlagosan átvihető adatbitek (vagyis ZH-pontszámok) száma időegységenként

$$r = \frac{N(1-p_b)^{M+N}}{M+N+K} = \frac{4(1-0.1)^{1+4}}{1+4+1} = 0.39366 \quad \left[\text{per öt másodperc}\right]$$

$\Rightarrow$ percenként $\frac{1\,min}{5\,sec} \cdot r = 12r = \underline{\underline{4.7239}}$ ZH-pontszám.

b.) A 12. ea-jegyzet 10. oldala szerint az optimális adatcsomagméret

$$N_{opt} = -\frac{\cancel{K}M+K}{2} + \sqrt{\frac{(M+K)^2}{4} + \frac{M+K}{\alpha}}$$ ahol

$\alpha = -\ln(1-p_b)$. Esetünkben

$$N_{opt} = -\frac{1+1}{2} + \sqrt{\frac{(1+1)^2}{4} + \frac{1+1}{-\ln 0.9}} \approx 3.47$$

$\Rightarrow$ vagy $N=3$, vagy $N=4$ a nyerő.

$N=3$-ra $r = \frac{3(1-0.1)^{1+3}}{1+3+1} = 0.39366$ ugyanannyi $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NINCS JOBB.}}$

Pontozás:

a.) 6 pont, ebből

- 1 pont a modell felismerése
- 3 pont az N,M,K értékének helyes leolvasása
- 1 pont a ráta kiszámolása
- 1 pont a helyes áttérés bit/perc-re

b.) 3 pont, ebből

- 1 pont az optimális adatcsomagméretet megadó képlet alkalmazása
- 1 pont a szomszédos egészek kipróbálása
- 1 pont annak megállapítása, hogy mindegy/nincs jobb.