A sorhossz várható értéke, üresjárat, foglaltság

Tekintsük az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ evolúciós egyenlettel leírt Markov láncot (sorhossz-modellt), lásd az előző órát.

Feltevések (emlékeztető):

$X_0 \in \mathbb{N}$ kezdeti sorhossz

(1,2) $V_1, V_2, V_3, \ldots \sim V$ kapacitások azonos eloszlásúak $\in \mathbb{N}$

$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots \sim Y$ érkező igények azonos eloszlásúak

és mind teljesen független

(3) X_n aperiodikus (és irreducibilis)

(4) $\mathbb{E}V < \infty$, $\mathbb{E}Y < \infty$

Tudjuk, hogy ha $\mathbb{E}Y < \mathbb{E}V$, akkor X_n stabil — legyen X^{stac} egy vd. változó a stac. eloszlással, és hogy ilyenkor az átlagos késleltetés $\bar{D} = \dfrac{\mathbb{E}X^{stac}}{\mathbb{E}Y}$.

A rendszer üzemeltetőjét elsősorban $\mathbb{E}X^{stac}$ érdekli, a felhasználókat pedig $\bar{D}$. Mindkettőhöz $\mathbb{E}X^{stac}$-ot kell kiszámolni.

Kérdés: $\mathbb{E}X^{stac} = ?$

Válasz: Ez általában nehéz (végtelen nagy lineáris egyenletrendszert kellene megoldani a határeloszlás kiszámolásához), de van egy fontos és könnyű eset:

Ha $V_n \in \{0,1\}$, vagyis minden időszakban legfeljebb 1 igényt szolgálunk ki, akkor van könnyű képlet.

[$V_n \in \{0,1\}$ persze pont azt jelenti, hogy V Bernoulli eloszlású:

$V \sim B(p)$ valamilyen $p \in (0,1]$-re, és $\mathbb{E}V = p$.

Az is jó, ha $p = 1$, vagyis $V \equiv 1$: mindig pontosan 1 igényt szolgálunk ki.]

<u>Tétel</u>: Tegyük fel (a fenti 1 -- 4) mellett, hogy $V \in \{0,1\}$ és $\mathbb{E}Y < \mathbb{E}V$. Ekkor

$$\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\mathbb{E}Y(1-\mathbb{E}Y) + \mathrm{Var}\,Y}{2(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)}$$

[Spec: Ha $V \equiv 1$, akkor $\mathbb{E}V = 1$, vagyis

$$\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\mathbb{E}Y}{2} + \frac{\mathrm{Var}\,Y}{2(\cancel{\mathbb{E}Y}\,1 - \mathbb{E}Y)}$$
]

[<u>Érdekes</u>: Előfordulhat, hogy $\mathbb{E}Y < \mathbb{E}V \leq 1$, de $\mathrm{Var}\,Y = \infty$.

Ekkor a rendszer stabil, de $\mathbb{E}X^{stac} = \infty$ és $\bar{D} = \infty$ (!)]

<u>Fontos</u> <u>következmény</u> Tfh Y adott, az üzemeltető pedig azzal spórol, hogy $\mathbb{E}V = \mathbb{E}Y + \text{kicsi}$.

Ekkor $\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\text{adott}}{\text{kicsi}} = \text{nagy}$ és $\bar{D}$ is nagy.

Biz: (egy kis csalással):

Mivel $V_{n+1} \in \{0,1\}$, az evolúciós egyenlet úgy néz ki, hogy

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Y_{n+1}, & \text{ha } X_n = 0 \\ X_n - V_{n+1} + Y_{n+1}, & \text{ha } X_n \geq 1 \end{cases} = X_n - V_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} + Y_{n+1}$$

Legyen $W_{n+1} = V_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} = \begin{cases} V_{n+1}, & \text{ha } X_n \geq 1 \\ 0, & \text{ha } X_n = 0 \end{cases}$

a ténylegesen kiszolgált igények száma az $(n+1)$-edik időszakban.

Ekkor $\boxed{X_{n+1} = X_n - W_{n+1} + Y_{n+1}}$ az evolúciós egyenlet

(de vigyázat: W_{n+1} nem független X_n-től).

Legyen az X_n folyamat stacionárius (vagyis indítsuk a stacionárius eloszlásból), ekkor $X_n \sim X^{stac}$ és $X_{n+1} \sim X^{stac}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E} X^{stac} = \mathbb{E} X_{n+1} = \mathbb{E} X_n - \mathbb{E} W_{n+1} + \mathbb{E} Y_{n+1} = \mathbb{E} X^{stac} - \mathbb{E} W_{n+1} + \mathbb{E} Y,$$

$(*)$

amiből $\underline{\underline{\mathbb{E} W_{n+1} = \mathbb{E} Y}}$ (hát persze).

Most jön a trükk: Nézzük az evolúciós egyenlet négyzetét:

$$\cancel{\mathbb{E} X_{n+1}^2 = \mathbb{E} X_n^2 + \mathbb{E} W_{n+1}^2 + \mathbb{E} Y}$$

$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + W_{n+1}^2 + Y_{n+1}^2 - 2 X_n W_{n+1} + 2 X_n Y_{n+1} - 2 W_{n+1} Y_{n+1}$$

Ennek fogjuk a várható értékét venni.

Ebből. $W_{n+1} \in \{0,1\}$, ezért $W_{n+1}^2 = W_{n+1}$

- ~~X_n független~~ Y_{n+1} független X_n-től
- Y_{n+1} független W_{n+1}-től
- W_{n+1} nem független X_n-től, viszont szerencsére

$$X_n W_{n+1} = X_n V_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} = \underbrace{\left(X_n \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}}\right)} V_{n+1} = X_n V_{n+1},$$

hurrá, ezek függetlenek

ez itt $\begin{cases} X_n, & \text{ha } X_n \geq 1 \\ 0, & \text{ha } X_n = 0 \end{cases} = X_n$

Vagyis

$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + W_{n+1} + Y_{n+1}^2 - 2X_n V_{n+1} + 2X_n Y_{n+1} - 2W_{n+1}Y_{n+1} \quad / \mathbb{E}(\,)$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + \mathbb{E}W_{n+1} + \mathbb{E}(Y_{n+1}^2) - 2\mathbb{E}X_n \mathbb{E}V_{n+1} + 2\mathbb{E}X_n \mathbb{E}Y_{n+1} - 2\mathbb{E}W_{n+1}\mathbb{E}Y_{n+1}$$

Ebből már tudjuk, hogy $\mathbb{E}W_{n+1} = \mathbb{E}Y$.

Mivel X_n stacionárius, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(X_n^2)$ kiesik, $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X^{stac}$, és az marad, hogy

$$0 = \mathbb{E}Y + \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}X^{stac}\mathbb{E}V + 2\mathbb{E}X^{stac}\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Y\mathbb{E}Y. \quad (**)$$

Ebből $\mathbb{E}X^{stac}$ kifejezhető:

$$\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\mathbb{E}Y - 2(\mathbb{E}Y)^2 + \mathbb{E}(Y^2)}{2(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)} = \frac{\overbrace{\mathbb{E}Y - (\mathbb{E}Y)^2}^{\mathbb{E}Y(1-\mathbb{E}Y)} + \overbrace{\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2}^{\mathrm{Var}Y}}{2(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)}$$

$\square$

Megj: Két helyen csaltunk:

(*)-nál kihasználtuk, hogy $\mathbb{E}X^{stac} < \infty$

(**)-nál kihasználtuk, hogy $\mathbb{E}((X^{stac})^2) < \infty$.

Egyik sem feltétlenül igaz, a második még akkor sem, ha $\mathrm{Var}\,Y < \infty$. (Az kell hozzá, hogy $\mathbb{E}(Y^3) < \infty$ legyen.)

A bizonyítást pl. úgy lehetne precízzé tenni, hogy bevezetünk egy K maximális sorhosszt, és az efölött érkező igényeket eldobjuk. Az így kapott X_n^K Markov lánc már véges állapotterű, így minden várható érték véges.

Ezután $K \to \infty$.

Az eljárás neve levágás / csonkolás / truncation.

Az üresjárat valószínűsége

Az előző tétel bizonyítása során mellesleg kijött, hogy

Tétel: Az előző tétel feltételei mellett

$$\mathbb{P}(X^{stac}=0)=1-\frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V}$$

Biz.: $W_{n+1} := V_{n+1}\mathbb{1}_{\{X_n\geq 1\}}$ volt a ténylegesen kiszolgált igények száma az $(n+1)$-edik időszakban.

Erről láttuk, hogy $\mathbb{E}W_{n+1}=\mathbb{E}Y$.

De hát V_{n+1} független X_n-től, ezért

$$\mathbb{E}W_{n+1}=\mathbb{E}V_n\,\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X_n\geq 1\}}=\mathbb{E}V\,\mathbb{P}(X_n\geq 1)$$

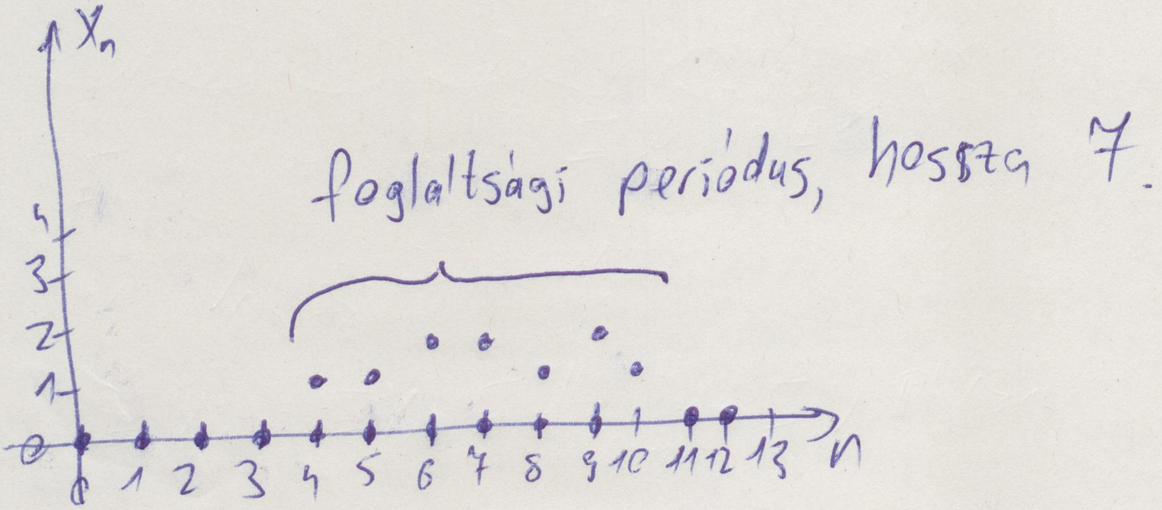
amiből $\mathbb{P}(X_n\geq 1)=\dfrac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V}$ $\square$

Tanulság: $\mathbb{P}(X^{stac}=0)$ csak akkor lehet kicsi, ha $\mathbb{E}V\approx\mathbb{E}Y$, akkor viszont $\mathbb{E}(X^{stac})$ lesz nagy.

Vagyis ha a sorhosszt és a késleltetést korlátban akarjuk tartani, akkor a kapacitás egy számottevő része szükségszerűen kihasználatlan kell, hogy maradjon.

A foglaltsági periódusok hossza

Ha a sor üres és érkezik egy (vagy több) igény, akkor elkezdődött egy „foglaltsági periódus", és addig tart, amíg a sor újra üres nem lesz. Vagyis a foglaltsági periódus hossza azon ~~sz~~ szomszédos n-ek száma, amire $X_n \neq 0$.



<u>Tétel</u> Az előző tételek feltételei mellett

$$\mathbb{E}_{stac}(\text{foglaltsági periódus hossza}) = \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{P}(Y \geq 1)(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)}$$

<u>Biz.:</u> A foglaltsági periódus hosszát jelölje T.

A (nullából) nullába való első visszatérés ideje legyen τ.

Tfh $X_0 = 0$.

Ekkor ha $X_1 = 0$, vagyis nem érkezett igény, akkor nem is kezdődött el egy foglaltsági periódus, ám $\tau = 1$.

• ha viszont $X_1 \geq 1$ (ami ugyanaz, mint hogy $Y_1 \geq 1$),

akkor elkezdődött a foglaltsági periódus és $\tau = 1 + T$.

Ezekből $\mathbb{E}(\tau \mid Y_1 = 0) = 1$

$$\mathbb{E}(\tau \mid Y_1 \geq 1) = 1 + \mathbb{E}T$$

A teljes várható érték tétel miatt

$$\mathbb{E}\tau = \mathbb{P}(Y_1 = 0)\,\mathbb{E}(\tau \mid Y_1 = 0) + \mathbb{P}(Y_1 \geq 1)\,\mathbb{E}(\tau \mid Y_1 \geq 1)$$

$$= \mathbb{P}(Y_1 = 0) + \mathbb{P}(Y_1 \geq 1)(1 + \mathbb{E}T)$$

$$= 1 + \mathbb{P}(Y_1 \geq 1)\,\mathbb{E}T,$$

amiből $\mathbb{E}T = \dfrac{\mathbb{E}\tau - 1}{\mathbb{P}(Y_1 \geq 1)}$.

Emlékeztünk: $\mathbb{E}\tau = \dfrac{1}{\pi_0}$, ahol π az egyetlen) stacionárius eloszlás, vagyis $\pi_0 = \mathbb{P}(X^{stac} = 0) = 1 - \dfrac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V}$ az előző tétel miatt.

Ebből

$$\mathbb{E}T = \frac{\dfrac{1}{1 - \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V}} - 1}{\mathbb{P}(Y \geq 1)} = \frac{\mathbb{E}V - (\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)}{\mathbb{P}(Y \geq 1)(\mathbb{E}V - \mathbb{E}Y)}$$

□

Megj: Abban a spec-spec esetben, amikor nem csak $V \in \{0,1\}$, hanem $Y \in \{0,1\}$ is, X^{stac}-nak, T-nek és a késleltetésnek nem csak a várható értékét tudjuk (majd) kiszámolni, hanem a teljes eloszlását.