

Generátorfüggvény-módster

1/12

Def: Egy $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ számsorozat generátorfüggvénye

$$a \text{ g}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \text{ függvény.}$$

Magyarul: a sorozat alapján készítünk egy hatványsort, aminek együtthatói éppen a sorozat elemei.

Ez a sor általában bizonyos z -kre konvergens, másokra nem, ezért konvergencia

Def: Egy $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ számsorozat generátorfüggvénye

$$a \text{ g}: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ függvény,}$$

ahol $D \subset \mathbb{R}$ a hatványsor konvergenciátartomány.

Analízisből tudjuk, hogy D mindig intervallum, ráadásul a 0 körül szimmetrikus (eltekintve esetleg a végpontoktól):

$$D = (-r, r) \text{ vagy esetleg } [-r, r) \text{ vagy } (-r, r] \text{ vagy } [-r, r],$$

ahol $r \in [0, \infty]$ a konvergenciasugár (lehet ∞ is).

Analízisből tudjuk azt is, hogy ha $r > 0$, akkor D

belsejében, vagyis $(-r, r)$ -en g gyönyörűen viselkedik:

polynomes, sőt akárhányszor differenciálható, sőt lehet tagonként deriválni, SÖT:

A generátorfüggvény egyik leghasznosabb tulajdonsága, hogy $\frac{2}{12}$
 ha $r > 0$ (vagyis tényleg van függvény), akkor az a_k
 sorozat rekonstruálható $g(z)$ -ből:

$$a_0 = g(0)$$

$$a_1 = g'(0)$$

$$a_2 = \frac{g''(0)}{2}$$

$$a_3 = \frac{g'''(0)}{6}$$

⋮

$$a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

↙ k-adik derivált

Ez persze nem más, mint a g függvény Taylor sor-
 fejítése.

Lényeg: (a_k) és $g(z)$ ugyanazt az információt hordozza:

ha az egyiket ismerjük, az pont olyan jó, mint ha a
 másikat.

Legyen most X valószínűségi változó nemnegatív, egész
értékű: röviden $X \in \mathbb{N}$. Ekkor az X eloszlása lényegé-
 ben egy $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ szám sorozat: $p_k := P(X=k)$.

Ezért Def:

Az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g_X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k, \text{ vagyis a } p_k = P(X=k) \text{ sorozat}$$

generátorfüggvénye.

Fontos:

3/12

- ① Generátorfüggvénye csak nemnegatív, egész értékű vel. változónak van, a többinek nincs.
- ② Az értelmezési tartományon nem kell aggódnia:
 $r \geq 1$ biztosan teljesül, mert $g(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) 1^k = 1$,
~~vagyis $g(-1)$~~ (amiből következik, hogy $g(-1)$ is létezik),
vagyis $g_x(z)$ legrossztabb esetben $z \in [-1, 1]$ -re értelmes. Nekünk csak $z \in [0, 1]$ -re fog kelleni.

Tulajdonságok:

- 0.) g_x meghatározza a + eloszlást: $P(X=k) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$ (ez már volt)
 - 1.) $g_x(1) = 1$ - vagyis $g_x(1)$ értéke nem hordoz információt, de ellenőrzésre használható
 - 2.) a) $g_x'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + 4p_4 z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1}$,
amiből $\boxed{g_x'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = E[X]}$
 - b.) $g_x''(z) = 2p_2 + 6p_3 z + 12p_4 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2}$,
amiből $g_x''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k = E[X(X-1)] = E(X^2) - EX$.
- Ezekből $\boxed{\text{Var } X = E(X^2) - (EX)^2 = g_x''(1) + g_x'(1) - (g_x'(1))^2}$

Megjegyzés: (p_k) és $g(z)$ ugyanazt az információt hordozta,
 de az oda-vissza áttérés általában macerás: sort
 felösszegezni / ~~hat~~ függvényt sorba fejteni általában nehéz.
 Ha $P(X \leq 100)$ valószínűség érdekelt, akkor a generátor-
 függvény nem túl kényelmes: számszor kell lederiválni
 (ha jobb ötletünk nincs a sorfejtésre).
 Ha viszont EX , $Var X$ érdekelt, akkor $g(z)$ még jobb
 is, mint az eloszlás: deriválni könnyebb, mint végtelen
 összegeket számolni.

3.) $g_X(z) = p_0 = P(X=0)$ (Ennél fontosabb kérdés ritkán
 van egy \mathbb{N} -értékű val. változóval kapcsolatban, ami
 többnyire darabszám.)

4.) $g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k = E(z^X)$, ez lép és hátszoros.

5.) Tétel: Legyen X és Y független nemnegatív egész értékű
 val. változó, $Z = X+Y$. Ekkor

$$g_Z(z) = g_X(z) g_Y(z).$$

Biz: $g_Z(z) = E(z^Z) = E(z^{X+Y}) = E(z^X \cdot z^Y) \stackrel{\text{függetlenségi}}{=} E(z^X) E(z^Y) \quad \square$

Megj: Ha X eloszlása a_0, a_1, a_2, \dots
 Y eloszlása b_0, b_1, b_2, \dots } X és Y független

5/12

$Z = X + Y$ eloszlása c_0, c_1, c_2, \dots

akkor $c_k = \sum_{e=0}^k a_e b_{k-e}$, amit így hívunk, hogy

$c = a * b$, a két sorozat konvolúciója.

Általában igaz, hogy két sorozat konvolúciójának generátorfüggvénye a generátorfüggvények szorzata.

Ez már nyomós ok arra, hogy a generátorfüggvényt
szeressük: konvolúciót számolni nehéz, szorozni könnyű.

Megj: Vannak más transformációk is, amik konvolúcióból,
szorzást csinálnak, és ezért szeretjük őket:

- Fourier transformáció — val. számos neve karakterisztikus függvény
- Laplace-transformáció — val. számos neve momentumgeneráló függvény.

Az, hogy mi most mégis a generátorfüggvényt tanuljuk,
az a következő fogalom + tétel miatt van.

Def: Legyen $X_1, X_2, X_3, \dots \in \mathbb{N}$ független és azonos eloszlású.
 \mathbb{N} fontos!

Legyen $N \in \mathbb{N}$ szintén egy valószínűségi változó,
független az ~~X_1, X_2, X_3, \dots~~ X_k -ktől

Legyen $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$ **VÉLETLEN!!**

Ekkor S_N -et véletlen tagstámú összegnek nevezzük.

[Konvenció: Ha $N=0$, akkor $S_N=0$ (üres összeg)]

[Vagyis mostantól, ha azt mondám, hogy „véletlen tagstámú összeg”, akkor abban beleérttem, hogy $X_1, X_2, \dots \in \mathbb{N}$ független és azonos eloszlású és független N -től is.]

6.) Tétel Legyen $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$ véletlen tagstámú összeg.

Legyen az X_1, X_2, \dots közös generátorfüggvénye g_x
 $N \rightsquigarrow g_N$
 $S_N \rightsquigarrow g_{S_N}$

Ekkor $g_{S_N}(z) = g_N(g_x(z))$.

Más szóval $g_{S_N} = g_N \circ g_x$ függvény-kompozíció.

Biz: A teljes várható érték tétel miatt

7/12

$$g_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E(z^{S_N} | N=n) \quad \begin{array}{l} \text{ha } N=n, \\ \text{akkor } S_N = S_n \end{array}$$

4.) tétel

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E(z^{S_n} | N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E(z^{X_1 + X_2 + \dots + X_n} | N=n) \quad \begin{array}{l} X_1, \dots, X_n \text{ független} \\ N\text{-től!!} \end{array}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E(z^{X_1 + \dots + X_n} | N=n) \quad \begin{array}{l} \text{5.) tulajdonság,} \\ X_1, X_2, \dots \text{ f.q.e.} \end{array}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) [g_X(z)]^n \quad \begin{array}{l} y = g_X(z) \\ \text{ideiglenes jelölés} \end{array} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) y^n =$$

generátorfv.

definiciója $g_N(y) = g_N(g_X(z))$ □

Példák:

1) Ha $X \sim B(p)$, vagyis

k	0	1	egyéb
$P(X=k)$	$1-p$	p	0

akkor $g_X(z) = (1-p)z^0 + pz^1 = (1-p) + pz$

2) Ha $S_1, S_2, \dots, S_n \sim B(p)$ független és $X = S_1 + \dots + S_n$,

akkor $X \sim B(p)$ és $g_X(z) = [g_{S_i}(z)]^n = ((1-p) + pz)^n$.

5.) tétel

Éz perste kijön közvetlenül is:

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} \quad \text{binomiális tétel:} \quad (pz+1-p)^n$$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

8/12

3.) Ha ~~X~~ $X \equiv 0$, akkor $P(X=0)=1$,

vagyis $g_X(z) = 1 \cdot z^0 = 1$.

[Perste ilyenkor $X \sim B(0)$, és ebből is: $g_X(z) = (1-0) + 0 \cdot z = 1$]

4.) Ha $X \equiv 1$, akkor $P(X=1)=1$, vagyis $g_X(z) = z$.

[Avagy: $X \sim B(1)$, és ebből $g_X(z) = (1-1) + 1 \cdot z = z$]

5.) Ha $X \sim \text{Pessz Geom}(p)$, vagyis $P(X=k) = p(1-p)^k$ $k=0,1,2,\dots$

$$\text{akkor } g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} [(1-p)z]^k \quad \text{mértani sor} \quad p \frac{1}{1-(1-p)z}$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)z}$$

6.) Ha $X \sim \text{Pessz Geom}(p)$, $Y=1$ és $Z=X+Y$, akkor

$Z \sim \text{Geom}(p)$ (erre, remélem, mindenképp emlékszik),

és az 5.) tulajdonság miatt

9/12

$$g_z(z) = g_y(z) g_x(z) = z \frac{p}{1-(1-p)z} = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

↳ Adt persze: $Y=1$ determinisztikus, így bármelyik val. változótól független.

ÁHdában: $g_{X+k}(z) = z^k g_X(z)$, ha $k \in \mathbb{N}$ determinisztikus.

Ez annak felel meg, hogy a sorozat eltolása 1-gyel jobbra (úgy, hogy balról a 0. helyre bejön egy nulla) megfelel a generátorfüggvény z -vel való szorzásának.

7.) Ha $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, akkor $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,2,\dots$

$$\text{ezért } g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

Emlékezzünk:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

A Poisson eloszlás ritkítése

10/12

Egy pók által rakott peték száma Poisson eloszlású, λ várható értéke 20. Minden pete $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kel ki, függetlenül egymástól – és attól is, hogy hányan vannak. Mi a kikelt peték számának eloszlása?

$\lambda = 20$

Jelölések: Legyen $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ a lerakott peték száma, ~~λ~~

Legyen $X_1 = \begin{cases} 1, & \text{ha az első pete kikel} \leftarrow \text{ennek val.sége } \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha nem} \leftarrow \text{ennek is } \frac{1}{2} \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha a második pete kikel} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

\vdots

$X_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-adik pete kikel} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Legyen Y a kikelt peték száma.

A stöveg feltételei szerint $X_k \sim B(p)$ függetlenek, $p = \frac{1}{2}$

és X_1, X_2, \dots független N -től is, és perste

$Y = \sum_{k=1}^N X_k$, ami ~~par~~ véletlen tagok számú összeg.

Számoljuk ki a generátorfüggvényt: $q := 1-p$ jelöléssel

$$g_X(z) = q + pz, \quad g_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

11/12

Igy a 6. oldal 6.) tétel miatt

$$g_Y(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda[q+pz]-1}$$

Na, ez vajon milyen eloslas generátorfüggvénye lehet?

$$\text{Ehhez } g_Y(z) = e^{\lambda(pz + 1-p) - 1} = e^{\lambda p(z-1)} = e^{\mu(z-1)}$$

$$\text{ahol } \mu = \lambda p = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Ezt nem kell sarbafejtani, mert ~~regi~~ ^{friss} ismerősünk:

~~$Y \sim \text{Poi}(\lambda p)$, hiszen a karakterisztikus függvény~~

$$Y \sim \text{Poi}(\mu)$$

Megjegyzés: Az, hogy $EY = 10$, elég nyilvánvaló. Az, hogy Poisson eloslasu, intuitive sokkal világosabb lett volna, ha pékpete helyett hullócsillagokról beszéltek:

Móricka egy derült augusztusi éjjelen ~~11:00 és 05:00 között~~ ~~átlagosan~~ 11:00 és 05:00 között átlagosan 20 hullócsillagot székelt látni. ~~II~~ (A félév elejéről tudjuk, hogy a számuk $\text{Poi}(20)$ eloslasu.)

Igen ám, de pont Aug. 20-án bijel részben felhős az ég,
és a felhők minden hullócsillagot (ami pedig jökor
hallik jó helyen) $\frac{1}{2}$ valószínűséggel eltakarják (a többitől
függetlenül). Mi lesz a Mericka által mégis látott
HCS-k számának eloszlása?

12/12

Hát persze, hogy Poisson: továbbra is

- sok kö próbálkozók azzal, hogy jökor jó helyen
égyen el

- a siker-valószínűség külön-külön nagyon kicsi
lenne derült időben is

- csak egy ráadás nehézség, hogy a felhő takarását
is el kell kerülni

~~de~~ A sikeres próbálkozók száma ilyenkor Poisson eloszlású.