

Tömegkiszolgálás

ZH, 2021 tavasz, 2021.05.05, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

1. Móricka egy lövöldözős játékkal játszik a számítógépén. Időnként kibújik a fedezékből, rálő az ellenfélre, majd gyorsan visszabújik. Minden ilyen alkalommal, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{10}$ valószínűséggel találja el az ellenfelét. Sajnos azonban amikor ő nem talál, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel őt viszont eltalálják. (Ez nem nagy baj: rögtön újrakezdi.)

Legyen X a Mórickát érő találatok száma, mielőtt neki először sikerül találnia.

- a.) Mennyi X várható értéke?
 - b.) Mennyi X szórása?
2. Egy LED-es fénysor a következő szabály szerint villog: Négyféle állapota van, a fénye lehet erős vagy gyenge, illetve piros vagy kék. Mindig 1 másodpercig marad egy állapotban, aztán véletlen módon vált, az állapotok sorozata időben homogén Markov lánc. Az átmenet-valószínűségeket egy 4x4-es sudoku rejtvény megoldásából kapjuk, ha minden számot elosztunk 10-zel:

	erős kékre	gyenge kékre	erős pirosra	gyenge pirosra
erős kékről	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
gyenge kékről	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
erős pirosról	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
gyenge pirosról	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

Hosszú távon az idő mekkora részében lesz a fény erős kék?

Bónusz kérdés: Mi történik, ha egy másik LED-sor 3-féle színű és 3-féle erősségű fénnel világíthat, és az átmenet-valószínűségeket egy rendes 9x9-es sudoku táblázatból vesszük (persze a táblázat minden elemét 45-tel osztva)?

3. Jancsika kezdő email használó. Az email fiókjába a levelek Poisson folyamat szerint érkeznek, naponta átlagosan $\frac{8}{10}$. Pistike minden nap pontosan egy levelet válaszol meg, mindig pont éjfélkor (már ha éppen van megválaszolatlan levél). Hosszú távon átlagosan hány megválaszolatlan levelet talál a fiókjában, amikor (közvetlenül éjfél előtt) megnézi?
4. Egy kertbe a gyomnövények magját időnként befújja a szél: naponta átlagosan 10-et, Poisson folyamat szerint. Amelyik gyom bent van, az az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen időközönként elhullajt egy újabb magot, átlagosan tíznaponta. A kertész viszont irtja a gyomot: átlagosan 20 percenként kihúz egyet (az előzményektől független, exponenciális időközönként), már ha van mit kihúzni.

Hosszú idő átlagában hány gyom lesz a kertben?

5. Pistike asztali lámpájába spéci villanykörte kell, amit más lámpába nem használ. Ez a körte elég gyakran kiég: átlagosan 2 hónapig bírja, az élettartama exponenciális eloszlású. Pistikének csak nagy ritkán jut eszébe, hogy ilyen körtét vegyen, és akkor is mindig csak egyet vesz: évente átlag kétszer, Poisson folyamat szerint, teljesen függetlenül attól, hogy van-e otthon körte. (Az sem motiválja, ha nem működik a lámpa).

Amikor Pistike egy villanykörtével érkezik haza, megnézi a lámpát: ha ki van égve, akkor rögtön beleteszi; ha nem, akkor a szekrénybe. Ha egy körte kiég, akkor rögtön tesz bele egy másikat a szekrényből (persze csak akkor, ha van).

Hosszú távon átlagosan mennyi időt tölt egy villanykörte Pistike *szekrényében*?