Tömegkiszolgálás

ZH megoldások, 2021 tavasz, 2021.05.05, 18:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Pontozás általában:

- Minden feladat 8 pontot ér.
- A részpontszámok részletezve vannak az egyes megoldások után.
- Fő szabály: Ha valaki rossz irányba indul el – pl. hibásan ismeri fel az alkalmazandó modellt – és aztán a rossz irányban sok szép dolgot kiszámol, azért nem jár pont.
- Különösen vonatkozik ez arra, ha valaki olyat számol ki, ami a helyes megoldáshoz nem kell – pl. a 2-es feladatban hosszasan számolja a stacionárius eloszlást Gauss eliminációval, és csak a legvégén számolja el.

1. Móricka egy lövöldözős játékkal játszik a számítógépén. Időnként kibújik a fedezékből, rálő az ellenfélre, majd gyorsan visszabújik. Minden ilyen alkalommal, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{10}$ valószínűséggel találja el az ellenfelét. Sajnos azonban amikor ő nem talál, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel őt viszont eltalálják. (Ez nem nagy baj: rögtön újrakezdi.)

   Legyen X a Mórickát érő találatok száma, mielőtt neki először sikerül találnia.

   a.) Mennyi X várható értéke?

   b.) Mennyi X szórása?

   Megoldás:

Legyen N Móricka sikertelen! próbálkozásainak száma az első találat előtt: $N \sim \text{Pessz Geom}\left(\frac{1}{10}\right)$, $\frac{1}{10} = p_1$

Az i-edik ilyen próbálkozásnál legyen

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az ellenfél eltalálja} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \Rightarrow \xi_i \sim B\left(\frac{1}{2}\right), \quad \frac{1}{2} = p_2$$

Így $X = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$ véletlen tagszámú összeg

tétel az előadásról $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}N \, \mathbb{E}\xi_i$$

$$\mathrm{Var}\,X = (\mathbb{E}\xi_i)^2 \mathrm{Var}\,N + \mathbb{E}N \, \mathrm{Var}\,\xi_i$$

„Véletlen tagszámú összeg várható értéke és szórása" fejezet

De az is való, hogy $\mathbb{E}\xi_i = p_2 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}\,\xi_i = p_2(1-p_2) = \frac{1}{4}$

$$\mathbb{E}N = \frac{1}{p_1} - 1 = 9, \quad \mathrm{Var}\,N = \frac{1-p_1}{p_1^2} = \frac{9/10}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 90$$

„bevezetés 2" fejezet

$\Rightarrow$

a.) $\mathbb{E}X = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \underline{4.5}$

b.) $\mathrm{Var}\,X = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 90 + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{99}{4}$

$$\Rightarrow DX = \sqrt{\mathrm{Var}\,X} = \sqrt{\frac{99}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{11} \approx \underline{4.97}$$

Pontozás:

a.) 4 pont – ebből 2 a jelölések HELYES bevezetése, a véletlen tagszámú összeg néven nevezése. Max. 2 pont, ha valaki csak érzi, hogy a várható érték Móricka sikertelen lövései száma várható értékének a fele, de ezt nem indokolja véletlen tagszámú összeggel (vagy teljes várható érték tétellel, vagy másképp.)

b.) 4 pont

2. Egy LED-es fénysor a következő szabály szerint villog: Négyféle állapota van, a fénye lehet erős vagy gyenge, illetve piros vagy kék. Mindig 1 másodpercig marad egy állapotban, aztán véletlen módon vált, az állapotok sorozata időben homogén Markov lánc. Az átmenet-valószínűségeket egy 4x4-es sudoku rejtvény megoldásából kapjuk, ha minden számot elosztunk 10-zel:

	erős kékre	gyenge kékre	erős pirosra	gyenge pirosra
erős kékről	$3/10$	$4/10$	$1/10$	$2/10$
gyenge kékről	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$4/10$
erós pirosról	$4/10$	$3/10$	$2/10$	$1/10$
gyenge pirosról	$2/10$	$1/10$	$4/10$	$3/10$

Hosszú távon az idő mekkora részében lesz a fény erős kék?

Bónusz kérdés: Mi történik, ha egy másik LED-sor 3-féle színű és 3-féle erősségű fénnyel világíthat, és az átmenet-valószínűségeket egy rendes 9x9-es sudoku táblázatból vesszük (persze a táblázat minden elemét 45-tel osztva)?

Megoldás:

Legyen X_n a fényser állapota n másodperc után.

Ez a szöveg szerint időben homogén Markov lánc az

$S = \{1, 2, 3, 4\} = \{$erős kék, gyenge kék, erős piros, gyenge piros$\}$

állapottéren. Az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 3/10 & 4/10 & - & - \\ - & - & - & \\ \cdot & - & - & \\ - & - & & \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ a táblázat a feladatból.

Mivel ez a táblázat egy sudoku-megoldás leosztva 10-zel, ezért nem csak minden sorösszeg 1, hanem $\boxed{\text{minden oszlopösszeg is 1}}$.

[Aki nem tudja, hogy mi az a sudoku, az ellenőrizze az ~~sor~~ oszlopösszegeket!]

Vagyis a mátrix bisztochasztikus, ezért a előadásról tudjuk, hogy a $\Pi = \left(\frac{1}{4} \; \frac{1}{4} \; \frac{1}{4} \; \frac{1}{4}\right)$ egyenletes eloszlás stacionárius.

[Ez persze kijön a $(P^T - \mathbb{1})\Pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával is]

Mivel a ML véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel szerint $\boxed{\text{hosszú távon az idő } \Pi_1 = \frac{1}{4} \text{ részében lesz erős kék.}}$

Bónusz kérdés: Mivel a sudoku-ban 9×9-es táblán minden oszlopösszeg (is) mindig 45, teljesen mindegy, hogy hogy töltjük ki: a mátrix mindig bisztochasztikus lesz (és irreducibilis) $\Longrightarrow$ az egyetlen stac. eloszlás az egyenletes, és hosszú távon mind. a 9 állapot azonos gyakorisággal fordul elő. (hiv.: ergodtétel)

Pontozás:

- 1 pont a Markov lánc bevezetése
- 4 pont a stacionárius eloszlás megtalálása
- 1 pont az ergodtételre való hivatkozás
- 1 pont az ergodtétel feltételeinek ellenőrzése
- 1 pont a helyes válasz

3. Jancsika kezdő email használó. Az email fiókjába a levelek Poisson folyamat szerint érkeznek, naponta átlagosan $8/10$. Pistike minden nap pontosan egy levelet válaszol meg, mindig pont éjfélkor (már ha éppen van megválaszolatlan levél). Hosszú távon átlagosan hány megválaszolatlan levelet talál a fiókjában, amikor (közvetlenül éjfél előtt) megnézi?

Megoldás:

Jancsika email fiókja egy diszkrét idejű kiszolgálási sor:

legyen X_n a várakozó levelek száma = sorhossz

az n. napon közvetlenül éjfél előtt.

Ez az $X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Y_{n+1}$ sorhossz-evolúciós egyenlet szerint fejlődik, ahol

Y_n az n-edik napon érkező levelek száma.

Mivel a levelek Poisson folyamat szerint érkeznek, ezek az Y_n-ek ténylegesen függetlenek, és $Y_n \sim Poi(0.8)$.

A kérdés pedig az átlagos sorhossz:

Erre van képletünk előadásról: mivel a kiszolgálási kapacitás $V \equiv 1$, ezért [„A sorhossz várható értéke" jegyzet 1. tétel spec. esete] $\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\mathbb{E}Y}{2} + \frac{\mathrm{Var}Y}{2(1-\mathbb{E}Y)}$.

Az $Y \sim Poi(\lambda = 0.8)$ eloszlásról tudjuk, hogy [bevezetés 2. jegyzet] $\mathbb{E}Y = \mathrm{Var}Y = \lambda = 0.8$, ezért $\boxed{\mathbb{E}Y < 1, \text{ a rendszer stabil}}$, és

$$\boxed{\mathbb{E}X^{stac} = \frac{0.8}{2} + \frac{0.8}{2(1-0.8)} = 2.4}$$

Pontozás:

- 1 pont a Markov lánc bevezetése, az X_n pontos jelentésének leírásával
- 2 pont a sorhossz-evolúciós modell helyes felírása
- 2 pont a modellben a kapacitás és az érkező igények számának helyes bevezetése, helyes jelöléssel.
- 2 pont a kapacitás és az érkező igények számának helyes eloszlása
- 1 pont a sorhossz várható értékére vonatkozó képlet alkalmazása

4. Egy kertbe a gyomnövények magját időnként befújja a szél: naponta átlagosan 10-et, Poisson folyamat szerint. Amelyik gyom bent van, az az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen időközönként elhullajt egy újabb magot, átlagosan tíznaponta. A kertész viszont irtja a gyomot: átlagosan 20 percenként kihúz egyet (az előzményektől független, exponenciális időközönként), már ha van mit kihúzni.

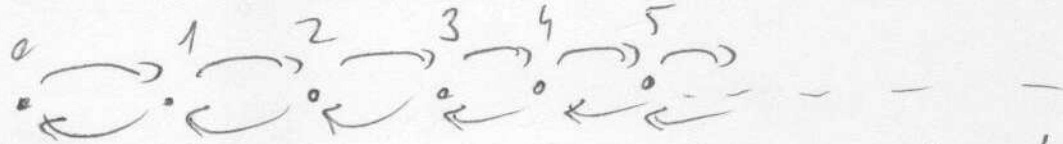
   Hosszú idő átlagában hány gyom lesz a kertben?

   Megoldás:

Legyen $X(t)$ a gyomok száma a kertben t idő elteltével.

Az időt mérjük órában.

Ez az $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc, azon belül is születési-halálozási folyamat:



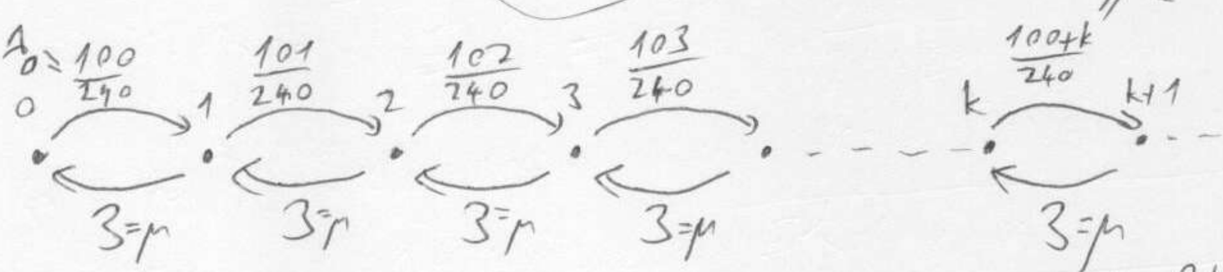
A lefelé ugrás rátája mindenhonnan 3, mert a kertész $\frac{3 \text{ db}}{\text{óra}}$ rátával húzogatja a gyomot (ha van). $\boxed{\mu := 3}$

A felfelé ugrás rátája viszont a k állapotból

$$\frac{10}{24} + k \cdot \frac{1}{240} =: \lambda_k$$

24 óránként
10 mag
kívülről

240 óránként
1 mag minden
egy és már bent lévő!! gyomra:



Amíg k kicsi, ~~akkor~~ addig $\lambda_k < \mu$, így a szül.hal. folyamat balra driftel, de ez ~~nem~~ ne tévesszen meg senkit; ha $k \to \infty$, akkor $\lambda_k \to \infty$, ~~vagy~~ míg μ = áll, így a lánc nem stabil, hanem tranziens:

ha lenne $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2 \ldots)$ stac. eloszlás, az olyan lenne,

hogy [szül. hal. folyamat] $\frac{\pi_{k+1}}{\pi_k} = \frac{\lambda_k}{\mu} \to \infty$,

így $\pi_k \to \infty$, és persze <u>nem normálható</u>

$\Rightarrow$ nincs stac. eloszlás

<u>Köv:</u> Hosszú távon az $\boxed{\text{átlag} \to \infty}$

Pontozás:

- 1 pont a Markov lánc bevezetése
- 1 pont a folytonos idejű születési-halálozási folyamat felismerése
- 2 pont az ugrási ráták helyes felírása
- 1 pont a stabilitási feltétel vizsgálata az egyetlen lehetséges stacionárius eloszlásra
- 2 pont az instabilitás felismerése
- 1 pont a helyes válasz

5. Pistike asztali lámpájába spéci villanykörte kell, amit más lámpába nem használ. Ez a körte elég gyakran kiég: átlagosan 2 hónapig bírja, az élettartama exponenciális eloszlású. Pistikének csak nagy ritkán jut eszébe, hogy ilyen körtét vegyen, és akkor is mindig csak egyet vesz: évente átlag kétszer, Poisson folyamat szerint, teljesen függetlenül attól, hogy van-e otthon körte. (Az sem motiválja, ha nem működik a lámpa).

   Amikor Pistike egy villanykörtével érkezik haza, megnézi a lámpát: ha ki van égve, akkor rögtön beleteszi; ha nem, akkor a szekrénybe. Ha egy körte kiég, akkor rögtön tesz bele egy másikat a szekrényből (persze csak akkor, ha van).

   Hosszú távon átlagosan mennyi időt tölt egy villanykörte Pistike *szekrényében*?

   Megoldás:

Pistike szekrénye egy M/M/1 kiszolgálási sor: az igények a villanykörték, az egyetlen kiszolgáló a lámpa, a kiszolgálás a kiégetés.

Az igények érkezési rátája ~~$\lambda = \frac{\text{körte}}{\text{év}}$~~ $\lambda = 2 \left(\frac{\text{körte}}{\text{év}}\right)$

a kiszolgálás rátája $\mu = 6 \left(\frac{\text{körte}}{\text{év}}\right)$.

A szekrényben eltöltött idő nem más, mint amit az igény sorbanállással tölt, (érkezésétől számítva), mielőtt bekerül a kiszolgálóba, vagyis a $\boxed{\text{várakozási idő}}$ (és nem a késleltetés).

Előadásról tudjuk: ("M/M/1 modell" jegyzet):

Mivel $\lambda < \mu$, a rendszer stabil, és az átlagos várakozási idő $\overline{W} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{2}{6} \frac{1}{6-2} = \frac{1}{12} \left(\frac{\text{év}}{\text{körte}}\right)$,

vagyis $\boxed{1 \text{ hónap}}$.

Pontozás:

- 1 pont a modell helyes felismerése
- 2 pont a ráták helyes leolvasása
- 2 pont annak felismerése, hogy a kiszolgáló (lámpa) és a várakozási sor (szekrény) itt elkülönül (a sorhossz tartalmazza a lámpában lévő körtét is)

- 2 pont a kérdés helyes felismerése (miszerint nem a késleltetés, hanem a várakozási idő a kérdés)
- 1 pont a helyes végeredmény