Tömegkiszolgálás
gyakorló feladatok, 2021 tavasz

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítás alapok

1.1 Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X-szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y-nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét.* Mennyi Y várható értéke?

1.2 Legyen $\lambda > 0$ rögzített. $n = 1, 2, 3 \ldots$-re legyen $p_n = \frac{\lambda}{n}$, és legyen az X_n valószínűségi változó eloszlása $X_n \sim Bin(n, p_n)$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$-re számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$

határértéket!

(Tipp: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$*.)*

1.3 Pistikééék padlásán egy villanykörte van felszerelve, aminek az élettartama exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. Pistike csak évente kétszer megy fel a padlásra: december 23-án a karácsonyfadíszekért, illetve január 23-án, eltenni a karácsonyfadíszeket.

Legutóbb, amikor Pistike december 23-án felment, azt vette észre, hogy az égőt felkapcsolva felejtette (nyilván január 23-án, amikor legutóbb ott járt), de már kiégett. Mi annak a valószínűsége, hogy az égő több, mint fél évet világított feleslegesen?

1.4 Pistike minden nyári este tesz egy sétát, és közben az eget nézi, hullócsillagokat figyelve. Egy este átlagosan 4-et szokott látni. Ennek megfelelően, ha 4-et vagy többet lát, akkor vidáman megy haza, ha viszont kevesebbet, akkor bánatosan.

Pistike augusztus 16-án bánatosan ment haza. Ezt tudva, mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen hullócsillagot sem látott?

(Rávezető kérdés: Legyen X a Pistike által augusztus 16-án látott hullócsillagok száma - ami persze egy valószínűségi változó. Mi X eloszlása? Pontosabban: Milyen eloszlással jó modellezni X-et?)

1.5 Pistike, Jancsika és Móricka matricákat gyűjt, amiket a csokihoz adnak a boltban. Hatféle matrica van, minden csokihoz egyet adnak, mindegyiket azonos valószínűséggel (az előzményektől függetlenül).

a.) Pistikének már három féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy négyféle legyen?

b.) Jancsikának már k-féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy $(k+1)$-féle legyen? (Itt $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.)

c.) Móricka csak most kezdi a gyűjtést. Mennyi a teljes matrica-készlet kigyűjtéséhez kibontandó csokik számának várható értéke és szórása?

2. Diszkrét idejű Markov láncok

2.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból $50 - 50\%$ valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor 50% valószínűséggel ott is marad, 50% valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. A 3-as állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát kockadobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mindhárom állapotnak.

a.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 131223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?

e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \,|\, X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a Markov lánc a 2-es állapotban lesz?

h.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ és $f(3) = 5$. Mennyi lesz az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon?

2.2 Egy számítógépes program négy részfeladatból álló feladatokat old meg. Minden időegység végén feljegyezzük, hogy hanyadik részfeladaton dolgozik éppen – ha pedig éppen üresjáratban vár egy új feladatra, akkor 0-t – vagyis a program a $0, 1, 2, 3, 4$ állapotokban lehet. Az 1, 2, 3 és 4 részfeladatokról a program mindig, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tud egy időegység alatt továbblépni a következő részfeladatra (úgy értve, hogy a 4 után a 0 jön), a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugyanazon dolgozik tovább. Ha a program a 0 üresjáratban van, akkor minden időegység alatt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel kap feladatot és ugrik az 1 állapotba (az előzményektől függetlenül), ellenkező esetben marad üresjáratban. Modellezzük a program feljegyzett állapotainak sorozatát időben homogén Markov lánccal!

a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot.

b.) Feltéve, hogy kezdetben a program a 0 állapotban van, mi a valószínűsége a „0001223440" megfigyelés-sorozatnak? (A kezdőállapotot is feljegyezzük.)

c.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a valószínűsége, hogy 3 időegység múlva a program éppen az 1-es részfeladaton dolgozik?

d.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a közelítő valószínűsége, hogy 1000 időegység után ismét a 0 állapotban van a program?

e.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a program üresjáratban?

f.) A programunk processzor-igénye üresjáratban 1%, az $1, 2, 3, 4$ részfeladatok végrehajtása során pedig rendre 10%, 30%, 50% illetve 99%. mennyi az átlagos processzor-terhelés hosszú távon?

2.3 John megfigyelései szerint reggelente, amikor Londonban munkába autózik, háromféle lehet az időjárás: *esik*, *zuhog* vagy *szakad*. Tapasztalata szerint egy nap időjárásából következtetni lehet a következő nap időjárására, az alábbi valószínűségi értelemben:

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik}|\text{ma esik}) = 1/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma esik}) = 6/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik}|\text{ma szakad}) = 2/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma szakad}) = 4/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma zuhog}) = 5/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap zuhog}|\text{ma zuhog}) = 4/10.$$

Jelöljük az időjárás állapotait számokkal: $0 :=$ „esik", $1 :=$ „zuhog", $2 :=$ „szakad". Modellezzük John reggeli megfigyeléseinek sorozatát időben homogén Markov lánccal!

a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot. (Vigyázat: a fenti átmenet-valószínűségek összevissza vannak megadva.)

b.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a valószínűsége a „00012" megfigyelés-sorozatnak (*elsejével* kezdve)?

c.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a valószínűsége, hogy harmadikán zuhog?

d.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a közelítő valószínűsége, hogy huszonkilencedikén zuhog?

e.) Hosszú távon a reggelek hány százalékán zuhog?

f.) Ha esik, John 20 percet autózik dugóban, ám ha zuhog, akkor 30-at, ha szakad, akkor pedig 70-et. Napi átlagban hány percet tölt reggeli dugóban autózással hosszú távon?

2.4 Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

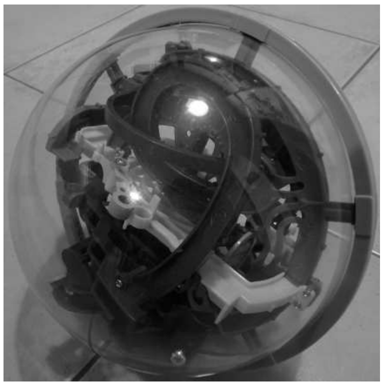
a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?

c.) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?

d.) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

2.5 Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



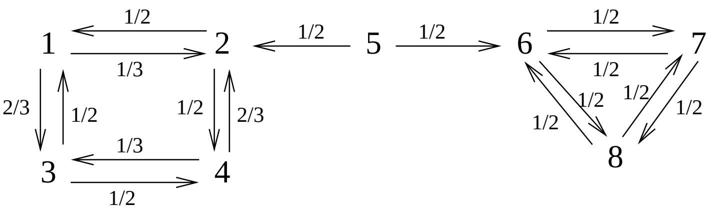
Magical Intellect Ball

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

2.6 Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx ?$

b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) \approx ?$

c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 6) \approx ?$

d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 5) \approx ?$

2.7 Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!

b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?

c.) A napok hányad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

2.8 Mari néni szeret beszélgetni, és befolyásolható. Minden este elmegy egy szomszédjához beszélgetni, és átveszi annak pártállását. Hat szomszédja van, ebből 2 fűpárti, 1 fapárti, 3 pedig virágpárti. Mari néni minden este vaktában választ beszélgetőpartnert azon 5 közül, akinél előző este *nem járt*. Jelöljük Mari néni lehetséges pártállásait $\{1, 2, 3\}$-mal, ahol „1" jelentése „fűpárti", „2" jelentése „fapárti", „3" jelentése „virágpárti". X_n pedig jelölje Mari néni pártállását n nap elteltével.

Modellezzük Mari néni állapotait időben homogén Markov láccal.

a.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát.

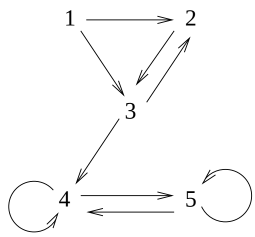
b.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége az 123123 állapotsorozatnak (a nulladik napot is beleértve)?

c.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége, hogy a 2-dik napon is az?

d.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz Mari néni éppen fapárti?

e.) Mari néni minden nap elmegy a gazdaboltba, és ha éppen fűpárti, akkor fűnyíródamilt vesz 500 Ft-ért, ha éppen fapárti, akkor permetszert 3000 Ft-ért, ha pedig virágpárti, akkor tápoldatot 1000 Ft-ért. Napi átlagban mennyit költ a gazdaboltban hosszú távon?

2.9 Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy



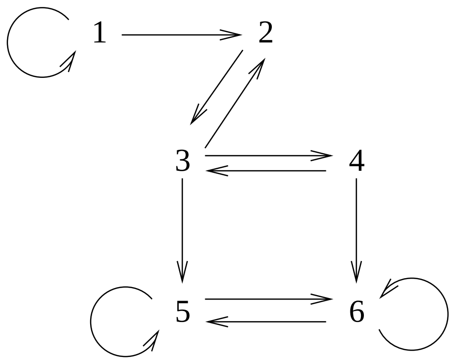
- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

2.10 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

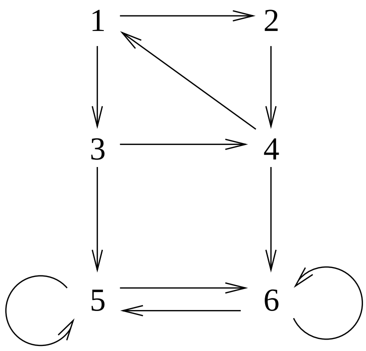
- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

2.11 A 2. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)



2. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

2.12 Egy jegypénztárhoz pontosan percenként érkeznek a vevők: minden perc végén pontosan 1. Ez alatt az egy perc alatt a pénztáros véletlen számú vevőt szolgál ki: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 2-t, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et sem, az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól:

- Ha a perc elején csak 1 vevő áll a sorban, mert akkor őt $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül kiszolgálni, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nem.
- Ha a perc végén már 4 vevő áll sorban, akkor az újonnan érkező nem áll be a sorba, hanem elkullog.

Jelölje X_n a sorban állók számát az n-edik perc végén (pontosabban: az $n+1$-edik perc elején, közvetlen azután, hogy az új vevő megérkezett). Tegyük fel, hogy az első perc elején a sorban pontosan 1 ember áll, vagyis $X_0 = 1$.

a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét. *(Vigyázat, érdemesésznél lenni: mik is a* ***lehetséges, elérhető*** *állapotok?)*

b.) Adjuk meg a Markov lánc gráf-reprezentációját!

c.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!

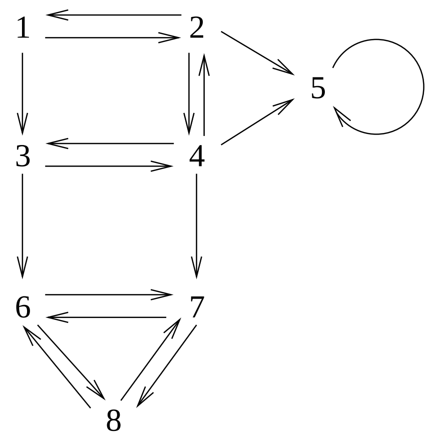
d.) Adjuk meg a Markov lánc kezdeti eloszlását, vagyis a $\pi(0)$ kezdeti eloszlás vektort!

e.) Mi a valószínűsége, hogy az $X_0X_1X_2\dots$ sorozat (a trajektória) eleje 1211223?

f.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ valószínűség?

g.) Számoljuk ki X_2 eloszlását, vagyis a Markov lánc 2 időegység utáni $\pi(2)$ eloszlásvektorát !

h.) Mennyi $n = 29$-re a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűség? *Csak képletet kérek!* ***Bónusz:*** *Számoljuk ki a* $\mathbb{P}(X_n = 3)$ *valószínűséget* $n = 10, 20, 30$*-ra valamilyen számítógépes programmal, ami gyorsan tud mátrixokat szorozni.*



3. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

2.13 A 3. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

2.14 Legyen X_n diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ állapottéren, ami egy sor hosszát modellezi. Az átmenetvalószínűségek legyenek olyanok, hogy ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet: a sor hossza $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 1-gyel csökken, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig 1-gyel nő. Kivétel ez alól, ha a sor üres, mert akkor a hossza csökkenés helyett $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 0 marad, illetve ha a sor hossza 7, mert akkor növekedés helyett $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 7 marad.

a.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását. Ehhez használjuk ki, hogy X_n születési-halálozási folyamat.

b.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 1000 lépés után ismét üres?

c.) Mennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz?

d.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz a fenti kérdésekre, ha a sorhosszra nincs felső korlát, vagyis az állapottér $\{0, 1, 2, \dots\}$?

2.15 Egy fagyisnál a sorban álló gyerekek száma 0 és 4 között változhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is): ha már 4-en vannak, és egy újabb gyerek be akarna állni, az apukája elrángatja. A fagyis bácsi nagyon igyekszik, de mindig csak $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül egy gyereket kiszolgálnia azelőtt, hogy egy újabb érkezne – az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól, ha 4-en vannak, mert akkor persze biztosan sikerül (új gyerek nem tud jönni), illetve ha a sor üres, mert akkor nincs is kit kiszolgálni.

Tekintsük a sorban állók számát *diszkrét időben*: a fagyis bácsi csettint egyet, valahányszor egy gyerek *érkezik vagy elmegy*, vagyis valahányszor a sor hossza változik. A sor hossza mindig pontosan 1-gyel változik (egyszerre csak 1 gyerek tud érkezni és elmenni is), és a fentiek szerint $\frac{3}{4}$ valószínűséggel csökken, a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nő, az előzményektől függetlenül (kivéve ha 4 vagy 0).

Legyen X_n a sor hossza az n-edik csettintés után (vagyis az n-edik sorhossz-változás után).

a.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 lépés után ismét üres?

b.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 lépés után ismét üres?

c.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját!

d.) Adjuk meg az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

e.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!

f.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés után ismét üres? *(Vigyázat: a feladat cseles, és az erre való tétel csak óvatosan alkalmazható. Egy hibásan alkalmazott tételnél jobb, ha precíz indoklás nélkül megsejtjük a helyes eredményt.)*

g.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?

2.16 Egy hallgató egy maratoni szóbeli vizsgán 2-esről indul. Az oktató sorban teszik fel neki a kérdéseket. Ha helyesen válaszol, a jegye 1-gyel javul (hacsak nem 5-ösre áll, mert akkor nem változik). Ha hibásan válaszol, akkor a jegye 1-gyel romlik (hacsak nem 1-esre áll, mert akkor nem változik. A hallgató minden kérdésre az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel válaszol helyesen. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 100 kérdés után ötösre áll?

2.17 Jancsika a Tömegkiszolgálás pótpótZH-ra gyakorol: ugyanannak az 5 kérdésből álló, a Moodle által automatikusan javított gyakorló feladatnak fut neki újra és újra. A Moodle minden válasz után azonnal jelzi, hogy a megoldás helyes-e. Ha hibás, akkor Jancsika újra próbálkozik ugyanazzal a kérdéssel, ha pedig helyes, akkor továbblép a következőre (illetve, ha az utolsónál járt, akkor elölről kezdi).

Jancsika nem fejlődik: minden alkalommal, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel válaszol helyesen a kérdésre.

A munkát az első kérdéssel kezdi. Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy 100 próbálkozás után ismét az első kérdésnél tart?

3. Generátorfüggvény-módszer

3.1 Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Mennyi c értéke?

(b) Mennyi X várható értéke?

(c) Mennyi X szórása?

(d) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

3.2 Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2}{4-2^z}$.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mennyi X szórása?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ és a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

3.3 Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = z^5 e^{z-c}$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

a.) Mennyi a c konstans értéke?

b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 100)$ valószínűség?

3.4 Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyiszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az érmével dobott fejek számát.

a.) Számoljuk ki Y generátorfüggvényét. *(Tipp: Y egy véletlen tagszámú összeg.)*

b.) Mennyi Y várható értéke?

3.5 Móricka addig dobál egy szabályos dobókockát, amíg kétszer *egymás után* ki nem jön neki a 6-os. Határozzuk meg a szükséges dobások X számának generátorfüggvényét és várható értékét. (Segítség: Nézzünk X-re mint véletlen tagszámú összegre: legyen N az a véletlen szám, hogy hányszor kiált fel Móricka, hogy „Na, egy hatos már megvan!". Így az X előáll mint N darab véletlen szám összege: az i-edik felkiáltáshoz Y_i darab dobás tartozik. Vigyázat: jól gondolkodjunk el Y_i eloszlásán. Figyelmeztetésül mondom, hogy minden $Y_i \geq 2$, mert dobni kell egy 6-ost, aztán még valamit, hogy eldőljön, vége-e a játéknak.)

3.6 Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

a.) X generátorfüggvényét,

b.) X várható értékét,

c.) X szórását.

3.7 Legyen $N \sim Geom(p)$ és $X_1, X_2, \dots \sim Geom(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

3.8 a.) Legyen $X \sim PesszGeom(p)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

b.) Legyen $Y \equiv 1$. Mennyi $\mathbb{E}Y$? Mennyi $\mathbb{V}arY$?

c.) Legyen $Z = X + 1$, így $Z \sim Geom(p)$. Az összeg várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó tételek segítségével számoljuk ki az $\mathbb{E}Z$ várható értéket és a $\mathbb{V}arZ$ szórásnégyzetet!

3.9 Legyen $X \sim Poi(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

3.10 Legyenek $N \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$ és $X_1, X_2, \dots \sim B\left(\frac{1}{3}\right)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

3.11 Ha az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó eloszlása $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, akkor a generátorfüggvénye $g(z) := p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots$, amiből rögtön látszik, hogy $z \in (0,1)$-re $g(z)$ második deriváltja nemnegatív (meg persze az összes többi deriváltja is, de ez most nem fontos), vagyis $g(z)$ konvex a $[0,1]$ intervallumon. Milyen legyen X eloszlása ahhoz, hogy $g(z)$ a $[0,1]$ intervallumon ne csak konvex, hanem *szigorúan konvex* legyen? (Vagy fordítva: hogyan fordulhat az elő, hogy $g(z)$ konvex, de nem szigorúan konvex?)

4. Diszkrét idejű sorbanállási modellek

4.1 A $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$ várakozási idő evolúciós modell mintájára adjuk meg a D_n késleltetés evolúciós egyenletét ugyanabban a FIFO modellben! (Vagyis ahol az egyes igények érkezése között $T_1, T_2, T_3, \dots$ idők telnek el, az egyes igények kiszolgálása egyesével, érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, S_3, \dots$.)

4.2 Egy könyvelő az asztalán lévő számlakupacból minden délelőtt feldolgoz valahány számlát, éspedig az n-edik nap délelőttjén V_n darabot (de legfeljebb annyit, amennyi van). Az iktatóból minden délután új számlák érkeznek a kupacra: az n-edik nap délutánján Y_n darab.

Jelölje $\hat{X}_n$ a számlakupac méretét az n-edik napon *délben.*

Írjuk fel $\hat{X}_n$ evolúciós egyenletét az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ egyenlet mintájára!

*(Figyelem! Emlékezzünk, hogy X_n a számlakupac mérete volt az n-edik napon **éjfélkor**.)*

4.3 Pistike minden délelőtt tönkretesz egy játékautót a kisautós dobozából (már amikor van benne), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután érmedobással dönt arról, hogy elmenjen-e a játékboltba, ha pedig elmegy, akkor megint csak érmedobással dönt arról, hogy 1 vagy 2 játékautót vegyen Pistikének, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba. (Vagyis minden délután $\frac{1}{4}$ val.séggel 1, $\frac{1}{4}$ val.séggel 2 játékautó érkezik.)

a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?

b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?

c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

d.) Tegnap este az anyuka betett egy vagy két autót az *üres* dobozba. Várhatóan (vagyis: várható értékben) hány nap múlva lesz a doboz újra üres?

4.4 Jancsika minden délelőtt p valószínűséggel autósat játszik, már ha éppen van kisautója. Ilyenkor tönkretesz két játékautót a kisautós dobozából (illetve, ha csak egy van, akkor azt az egyet), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután vesz egy új kisautót, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba.

a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?

b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?

c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

4.5 Józsi bácsi minden este feldob egy szabályos érmét, és ha az eredmény fej, akkor megiszik egy üveg bort – feltéve persze, hogy van a kamrában bor. Cserébe minden délelőtt elgurít egy szabályos dobókockát, és ha az eredmény 6-os, akkor elmegy a boltba, hoz K üveg bort és beteszi a kamrába. (Itt $K \in \{1, 2, 3, \dots\}$.) Hosszú távon átlagosan hány delet tölt Józsi bácsi kamrájában egy üveg bor? (A választ adjuk meg K függvényében!)

4.6 Móricka kurzusára 20 hallgató jár. Minden hallgató minden nap, egymástól és az előzményektől is függetlenül, 4% valószínűséggel ír egy (és csak egy) e-mailt Mórickának, szigorúan nappal. Móricka naponta pontosan 1 e-mailre válaszol (már ha éppen van mire), éspedig 23:00-kor. Hosszú távon átlagosan hány megválaszolatlan hallgatói levél van Móricka postaládájában *éjfélkor*?

(Vigyázat: éjfélkor!)

4.7 Egy oktatónak az az elve, hogy minden érkező emailre leghamarabb másnap válaszol, aznap érkezett levélre soha. Az általa tartott kurzus 10 hallgatójának mindegyike minden nap, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel küld egy emailt az oktatónak. (Egy nap egynél több emailt senki sem küld.) Az oktató minden nap pontosan egy hallgatói levélre válaszol (már ha van a postaládájában olyan, ami nem aznapi). Átlagosan hány éjszakát tölt az oktató postaládájában egy hallgatói levél hosszú távon?

4.8 Móricka vizsgát felügyel, és közben segít a hallgatóknak. A 10 hallgató között jár körbe-körbe, minden hallgatónál pontosan 1 percet tölt, és ezalatt megválaszol pontosan 1 kérdést, amit a hallgató feltesz (már ha a hallgatónak van kérdése). Minden hallgatónak minden percben, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel jut eszébe egy kérdés (a maradék $\frac{19}{20}$ valószínűséggel egy se). Átlagosan hány perc múlva kap választ Pistike a kérdéseire hosszú távon? *(Az pontosság/egyszerűség kedvéért fel kell tennünk, hogy Pistike minden eszébe jutó kérdéshez az időt Móricka előző látogatásától számítja, így minden kérdés „kiszolgálási ideje” percben mérve* 10*-nek többszöröse.)*

4.9 Róbert közrendőrnek 10 parancsnoka van, sorrendben 1., 2., ..., 10. számú parancsnok. Minden parancsnok, minden percben, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{20}$ valószínűséggel ad Róbertnek parancsot (mindenki csak 1-et). Ő azonban minden percben csak 1 parancsot tud végrehajtani. Ha több végre nem hajtott parancs is van nála, akkor azt hajtja végre, amelyik a legmagasabb rangú (vagyis legkisebb sorszámú) parancsnoktól jött, a többit halogatja. (Az időt egész percekben mérjük. Tegyük fel, hogy egy parancsot leghamarabb az érkezését követő percben lehet végrehajtani.)

a.) Hosszú távon átlagosan hány végre nem hajtott parancs van Róbert zsebében az 5. számú parancsnokától?

b.) Hosszú távon átlagosan hány perc után hajtja végre Róbert a 5. számú parancsnoktól érkezett parancsokat?

4.10 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1 - p$ val.séggel egy sem. A kiszolgálás érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idő mindig pontosan 2.

a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!

b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!

c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

4.11 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1-p$ val.séggel nem.

a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!

b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!

c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

4.12 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1-p$ val.séggel nem. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát!

4.13 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1-p$ val.séggel egy sem. A kiszolgálási idő mindig pontosan 2. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen $\bar{X}_n$ a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az $\bar{X}_n$ Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát! Küzben gondoljuk át, hogy $\bar{X}_n$ tényleg Markov-e.

4.14 Alfréd bácsi orvosi rendelőjéhez a betegek szabályos időközönként érkeznek az előjegyzett időpontjukra: 8:00-tól kezdve minden 15 percben 1 beteg. A betegek pontosan érkeznek: 8:00-kor, 8:15-kor, 8:30-kor, stb.

Alfréd bácsi pontosan az érkezési idő után 1 perccel hívja be a betegeket (8:01-kor, 8:16-kor, 8:31-kor, stb.), és minden beteget pontosan 10 perc alatt lát el (a mardék időben a rendelőt fertőtleníti). Ám sajnos néha más dolga is van: minden egyes negyedórában, az előzményektől függetlenül $\frac{5}{6}$ valószínűséggel lát el beteget, a maradék $\frac{1}{6}$ valószínűséggel azonnali minisztériumi adatigénylésre kell válaszolnia. Ilyenkor a betegek türelmesen várnak a váróteremben.

Szerencsére nem minden beteg jelenik meg: mindegyik, az előzményektől függetlenül, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel jön el (a többi nem értesült az időpontjáról).

Vilma néni estefelé érkezik az előjegyzett időpontjára, depressziós tünetekkel. Körülbelül mekkora valószínűséggel üres érkezésekor a váróterem? (Persze úgy értve, hogy az érkezése előtt közvetlenül.)

4.15 Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

a.) Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n-edik nap végén. Rajzoljuk fel az X_n Markov lánc gráf-reprezentációját és számoljuk ki a stacionárius eloszlást!

b.) Legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k-adik tejföl érkezése után! Mi az $\tilde{X}_k$ Markov lánc stacionárius eloszlása? *(Tipp: erre volt előadáson egy tétel.)*

c.) Tegyük fel, hogy Juliska néni a tejfölöket érkezési sorrendben használja el. Legyen D_k a k-adik tejföl által a hűtőben töltött éjszakák száma. Mi a D_k Markov lánc stacionárius eloszlása? *(Tipp: erre is volt előadáson egy tétel.)*

4.16 Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n-edik nap végén. Ennek időfejlődése könnyű, és most nem ezzel foglalkozunk.

Hanem: legyen most $\tilde{X}_k$ a tejfölök száma a hűtőben a k-adik tejföl érkezése után! (Ez persze legalább 1.)

a.) Írjuk fel az $\tilde{X}_k$ Markov lánc átmenetmátrixát! (Nyugodtan feltehetjük, hogy már az általunk „első”-nek számozott tejföl érkezése előtt is voltak tejfölök a hűtőben.)
(Tipp: $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejföl érkezéséig tervbe vett ragulevesek száma, ami persze pont az elhasznált tejfölök száma, ha van ennyi tejföl. Pont ennek a V-nek az eloszlását számoltuk ki egy másik feladatban.)
(Megoldás:

$$P_{ij} := \mathbb{P}(\tilde{X}_1 = j | \tilde{X}_0 = i) = \begin{cases} 0 & , \textit{ha } j > i+1 \\ A & , \textit{ha } j = i+1 \\ (1-A)L(1-L)^{i-j} & , \textit{ha } 2 \le j \le i \\ (1-A)(1-L)^{i-1} & , \textit{ha } j = 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ *és* $L = \frac{q}{p+q-qp}$. *)*

b.) Ellenőrizzük le kézzel, hogy $\tilde{X}_k$ stacionárius eloszlása az $\alpha := 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$ paraméterű geometriai eloszlás! Vagyis azt kell ellenőrizni, hogy

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij},$$

ahol $\pi_i = \alpha(1-\alpha)^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.
(Tipp: csodák csodája, $(1-\alpha)(1-L) = A$.)

4.17 Egy zajos csatornán másodpercenként 10^8 bitet tudunk átküldeni. Minden átküldött bit a többitől függetlenül 10^{-6} valószínűséggel sérül. A csatornán csomagokat küldünk át, amik N adatbitből és 64 kísérő bitből állnak. A vevő az esetleges hibákat teljes biztonsággal észleli és „negatív nyugtát” küld róluk, ami teljes biztonsággal megérkezik a küldőhöz. Ilyenkor a teljes csomagot újra kell küldeni. Másodpercenként legfeljebb hány bitnyi adatot lehet a csatornán átvinni hosszú távon, ha N-et jól választjuk meg, és

a.) a csomag elküldése után a nyugta azonnal megérkezik?

b.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg, és meg kell várni, mielőtt a következő csomagot küldeni kezdjük?

c.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg. Mi addig is küldjük a következő csomagokat, de ha negatív nyugta jön, akkor visszaugrunk a hibás csomagra és onnan folytatjuk, a csomagok sorrendjét továbbra is megtartva? *(Tipp: ebben az esetben az optimalizálás csak numerikusan megy. Nem kell túlzásba vinni: ábrázoljuk a kapacitást N függvényében, és olvassuk le a maximumot.)*

4.18 Jancsi egy listáról ZH-eredményeket diktál Juliskának, aki a Neptunba írja őket. Ciklusokban dolgoznak: egy ciklus során

- Jancsi 5 másodperc alatt bemond egy nevet a listáról,
- majd lediktálja 4 hallgató pontszámát, 5 másodpercenként egyet. (Vagyis a négyből három hallgató nevét Jancsi nem mondja be: bízik benne, hogy helyes sorrendben vannak a listán.)
- Ez után Juliska szintén 5 másodperc alatt visszajelez, hogy mindent jól értett-e.

(Így az egész ciklus 5+20+5=30 másodpercig tart.) Ha Juliska mindent értett, akkor mennek tovább, ha viszont nem, akkor újrakezdik a ciklust.

Juliska a neveket és az egyes pontszámokat is 90% valószínűséggel érti, egymástól függetlenül.

a.) Percenként hány pontszámot tudnak így beírni hosszú távon?

b.) Lehetne gyorsabban haladni, ha Jancsi nem 4-esével diktálná az eredményeket? Ha igen, hányasával lenne optimális?

4.19 Józsika rengeteg egymásra épülő házi feladatot old meg, naponta 1-et. (Reggel kezdi el, éjfélkor adja be). Minden megoldást $\frac{1}{10}$ valószínűséggel ront el, az előzményektől függetlenül (feltéve persze, hogy a korábbi feladatai jók). A tanára a javítással késésben van: minden feladatról a beadás után 10 nappal (éjfélkor) jelez vissza, hogy jó-e. Ha rossz, akkor Józsika kénytelen visszaugrani az adott feladatra, és onnan folytatni az egész sorozatot. Napi átlagban hány feladatot tud Józsika *helyesen* megoldani hosszú távon?

5. Poisson folyamat

5.1 Egy várban lévő száraz kút mellett rengeteg túrista megy el. Ezek mindegyike egymástól függetlenül, valamilyen kis valószínűséggel egy pénzérmét dob a kútba, amibe így egy nap alatt átlagosan 50 érme hull. Ezek mindegyike 50% valószínűséggel esik a „FEJ” oldalával felfelé, a többitől függetlenül.

a.) Legyen X az egy nap alatt (mondjuk június 1-én) a kútba dobott érmék száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség?

b.) Legyen Y az egy nap alatt „FEJ” oldalával felfelé a kútba eső érmék száma. A teljes várható érték tétel segítségével számoljuk ki Y várható értékét. *(Segítség: Mi is lesz Y feltételes eloszlása (ill. feltételes várható értéke) az $\{X = n\}$ feltétel mellett?)*

c.) Számoljuk ki Y eloszlását, vagyis a $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűségeket a teljes valószínűség tétel segítségével! *(Segítség: $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = e^x$.)*

5.2 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágnak. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?

b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

5.3 Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

a.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

b.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

c.) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

5.4 Egy radioaktív sugárforrás nagyon sok bomlásra képes atommagból áll, melyek mindegyike valamilyen kis valószínűséggel bomlik el éppen az általunk megfigyelt időintervallumban (és bocsát ki észlelhető sugárzást), a többi atommagtól függetlenül. A minta aktivitása $0.1Bq$ (vagyis Becquerel), ami azt jelenti, hogy másodpercenként átlagosan 0.1 bomlás történik.

a.) Legyen X az egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) történő bomlások száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség (és melyik k-kra)?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig pontosan 4 bomlás történik, 08:01-től 08:03-ig pedig pontosan 10?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 09:00-tól a következő bomlásig legalább 10 másodpercet kell várni?

5.5 Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfarészecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül). Mennyi a valószínűsége, hogy egy két másodperc hosszú időintervallumban legalább 4 részecskét észlel?

5.6 A radioaktív ^{14}C atommag élettartama (vagyis a létrejöttétől a bomlásáig eltelt idő) exponenciális eloszlású. A felezési idő 5730 év, ami azt jelenti, hogy egy sok atommagból álló mintának ennyi idő alatt bomlik el a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt másodpercben mérjük?

b.) Veszünk egyetlenegy ^{14}C magot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy másodpercen belül elbomlik? És hogy két másodpercen belül? És hogy 3 másodpercen belül? *(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)*

c.) Veszünk egy ezermilliárd (vagyis 10^{12}) magból álló mintát, és X-szel jelöljük a 3 másodperc alatt *bekövetkező* bomlások számát. Mennyi a $\mathbb{P}(X = 12)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

d.) A 10^{12} magból álló minta bomlásait egy detektorral figyeljük, ami csak a bomlások egy részét észleli: minden bomlást a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Legyen Y a 3 másodperc alatt *észlelt* bomlások száma. Mennyi a $\mathbb{P}(Y = 3)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

e.) Legyen T a detektor által észlelt első bomlás időpontja (másodpercben). Mi T eloszlása?

5.7 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

5.8 Egy számítógépes hálózati kiszolgálóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az igények, percenként átlagosan tíz. Minden igény kiszolgálása során $\frac{1}{10}$ valószínűséggel történik valamilyen hiba, az előzményektől függetlenül.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) 5-nél kevesebb igény érkezik?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 09:00-ig pontosan 2 hiba történik?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig legalább 5 igény érkezik, de egy hiba sem történik? (*Vigyázat: Az igények száma és a hibák száma nem független! Tipp: a hibát nem okozó igények száma viszont független a hibák számától. Miért is?*

5.9 A postafiókomba az emailek Poisson folyamat szerint érkeznek (éjjel-nappal egyenletesen), naponta átlagosan 24. Minden email a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel spam; $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem spam, de nincs is vele teendő; a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel viszont azt eredményezi, hogy valamit csinálni kell.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy reggel 8-tól 10 óráig 4-nél több emailt kapok?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 3 olyan email érkezik, amivel teendő lesz?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 5 email érkezik, de spam egy se? (*Vigyázat: Az emailek száma és a spamek száma nem független! Tipp: a spamek száma viszont független a többi email számától. Miért is?)*

5.10 Egy internetes kiszolgálóhoz percenként átlagosan 10 kérés érkezik, Poisson folyamat szerint. Minden kérés a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:02 között nem érkezik hibás kérés?

b.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között pontosan 20 kérés érkezett (összesen), mennyi a valószínűsége, hogy ezek egyike sem hibás?

c.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között legalább 18 hibátlan kérés érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy hibás viszont egy sem?

6. Laplace-transzformáció

6.1 Legyen $X \sim Exp(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel X Laplace transzformáltját! Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

6.2 Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Mi a Laplace-transzformáltja?

6.3 $X, Y \geq 0$ független valószínűségi változók, $Z = X + Y$, $X \sim Exp(1)$ és $Z \sim \Gamma(1, 1)$. Mi Y eloszlása?

6.4 Móricka éjjelente hullócsillagokat néz, és óránként átlagosan 4-et lát. Minden hullócsillag, a többitől függetlenül, véletlen ideig látszik. Ez a véletlen idő exponenciális eloszlású, $\frac{1}{10}s$ várható értékkel. Jelöljük X-szel azt az időt, ameddig Móricka 22:00 és 24:00 között hullócsillagot *lát* (másodpercben mérve).

a.) Számoljuk ki X Laplace transzformáltját! (Jelölje L.)

b.) Mennyi $L'(0)$?

c.) Mennyi $L''(0)$?

d.) Mennyi X szórásnégyzete?

(A precízek kedvéért: Elvileg előfordulhat, hogy egyszerre két hullócsillag is látszik, vagy hogy egy hullócsillag felvillanása csak részben esik 22:00 és 24:00 közé (pl. mert 22:00 előtt egy ezredmásodperccel kezdődik). Ezektől nagyvonalúan tekintsünk el.)

6.5 Pistike irodájában reggel 8-tól kezdve óránként átlag 3-szor csörög a telefon, Poisson-folyamat szerint. Pistike valamikor 8:00 és 9:00 között érkezik az irodába, egyenletes eloszlású véletlen időpontban (ami független a telefonhívásoktól). Mi a valószínűsége annak, hogy Pistike egyetlen hívásról sem marad le?

7. Folytonos idejű Markov láncok

7.1 Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

a.) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

b.) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

c.) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja?

d.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve?

e.) Hosszú távon mennyi lesz Pistike jókedvének időátlaga?

7.2 A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t. Az időt mérjük hónapokban.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünk észnél a rátákkal!*

b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?

d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?

e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).

7.3 Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár”, illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel”.

Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

7.4 Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy három állapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov lánc Q átmenet-valószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(5)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

c.) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?

d.) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?

7.5 Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t $(t \geq 0)$ a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes késznél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

b.) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

c.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

d.) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

e.) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

7.6 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben.*

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! *(Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várni!)*

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

7.7 Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörték élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$-vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.

a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). *(Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük **valamelyik**?)*

b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

c.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?

d.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?

e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?

7.8 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov lánccal.

a.) Mi a Markov lánc állapottere?

b.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.

c.) Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.

d.) Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.

e.) Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?

f.) Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?

g.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.

h.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

i.) Ha a sor $t = 0$-kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?

j.) Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?

7.9 Egy fagyishoz a gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan ketten, és beállnak a sorba. A fagyis bácsi minden gyereket független, exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki, 1 perc várható értékkel. Ha a sorban nem áll senki, a fagyis bácsi unatkozik. Hosszú távon az idő hány százalékában fog unatkozni, ha

a.) A sor hossza legfeljebb 5 lehet, mert ha már 5-en állnak sorban, akkor a további érkező gyerekeket az apukájuk elrángatja.

b.) A sor hossza akármennyi lehet, de ha legalább 5, akkor csak a gyerekek legelszántabb $\frac{1}{3}$-a áll be. (Minden gyerek, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel legelszántabb.)

(Segítség: Legyen $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Szabad kihasználni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

7.10 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban legfeljebb 5 feladat lehet (azzal együtt, amelyik éppen kiszolgálás alatt áll), ami ezen felül esetleg érkezik, az elvész. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

f.) A beérkező feladatok mekkora hányada vész el hosszú távon?

7.11 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban akárhány feladat lehet. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

8. Folytonos idejű sorbanállási modellek

8.1 Legyen az X valószínűségi változó eloszlása *nullában torzított geometriai*: $X = V \cdot Y$ ahol $V \sim B(p)$, $Y \sim Geom(r)$ és Y független V-től. (Magyarul: feldobunk egy hamis érmét, amin a fej val.sége p. Ha írás jön ki, akkor $X = 0$, ha pedig fej, akkor X legyen $\sim Geom(r)$.

a.) Írjuk fel X eloszlását (vagyis a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségeket). *(Megjegyzés: Erre nem lesz szükség a többi részfeladathoz.)*

b.) Mennyi X várható értéke?

c.) Mennyi X^2 várható értéke?

d.) Mennyi X szórása?

e.) Mi X generátorfüggvénye? *(Tipp: teljes várható érték tétel.)*

8.2 Tegyük fel, hogy az $X \in \mathbb{N}$ val.változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{a+bz}{c+dz}$ alakú, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $c \neq 0$. Lássuk be, hogy ekkor X eloszlása 0-ban torzított geometriai.

8.3 Legyen az X valószínűségi változó eloszlása *hiányos exponenciális*: $X = V \cdot Y$ ahol $V \sim B(p)$, $Y \sim Exp(\alpha)$ és Y független V-től. (Magyarul: feldobunk egy hamis érmét, amin a fej val.sége p. Ha írás jön ki, akkor $X = 0$, ha pedig fej, akkor X legyen $\sim Exp(\alpha)$.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mennyi X^2 várható értéke?

c.) Mennyi X szórása?

d.) Mi X Laplace transzformáltja? *(Tipp: teljes várható érték tétel.)*

8.4 Tegyük fel, hogy az $X \geq 0$ val.változó Laplace transzformáltja $L(s) = \frac{a+bs}{c+ds}$ alakú, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $d \neq 0$. Lássuk be, hogy ekkor X eloszlása hiányos exponenciális.

8.5 Móricka egyéni konzultációt tart a hallgatóinak. A hallgatók kérdéseire egyesével válaszol, minden hallgató (egyetlen) kérdésére az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő alatt, átlagosan 5 perc alatt. A kíváncsi hallgatók Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan tizenöten, és beállnak a Móricka irodája előtt kígyózó sorba. Ebben a tempóban Móricka nyilván nem győzné a sok kérdést. Ám szerencsére nem minden hallgató jut el a kérdezésig: mindegyikük, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel rossz konzultációra jött, és erre csak akkor jön rá, amikor sorra került. Akkor viszont azonnal kiderül a hiba, és a hallgató azonnal elmegy. (Más szóval: az egy hallgatóra fordítandó idő $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nulla, a maradék $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig exponenciális eloszlású 5 perc várható értékkel.)

Nézzük a folyamatot mint kiszolgálási sort, ahol az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, \dots \sim T$, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, \dots \sim S$.

a.) Mi T eloszlása?

b.) Mi S eloszlása? *(Itt kell észnél lenni!)* Mennyi S várható értéke? Mennyi S szórásnégyzete? Mi S Laplace transzformáltja?

c.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?

d.) Hosszú távon az idő mekkora hányadában válaszol kérdésekre Móricka?

e.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban, *nem számítva* azt, akinek Móricka éppen válaszol?

f.) Móricka, valahányszor egy kérdésre válaszolt, és a hallgató éppen elment, kinéz az ajtón. Hosszú távon átlagosan hány embert lát sorban állni?

g.) Hosszú távon, átlagosan, az érkező hallgatók hány másik embert találnak maguk előtt a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?

h.) A sok hallgató átlagosan hány percet tölt sorban állással (nem számítva azt az időt, amikor Móricka már vele foglalkozik)?

i.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten állnak előtte a sorban? *(Tipp: számoljuk ki a sorban állók számának generátorfüggvényét, aztán nézzük meg jól.)*

j.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 10 perc alatt sorra kerül? *(Tipp: számoljuk ki a várakozási idő Laplace transzformáltját, aztán nézzük meg jól.)*

k.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc múlva már nincs is ott?

8.6 Móricka egyéni konzultációt tart a hallgatóinak. A hallgatók kérdéseire egyesével válaszol, minden hallgató (egyetlen) kérdésére az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő alatt, átlagosan 5 perc alatt. A kíváncsi hallgatók Poisson folyamat szerint érkeznek, átlagosan húszpercenként. Igen ám, de nem csak egyesével jöhetnek: előfordul, hogy több hallgató is jön *egyszerre*: konkrétan az érkezők száma mindig az előzményektől független, $p = \frac{1}{3}$ paraméterű geometriai eloszlású val.változó. *(Megjegyzés: Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a hallgatók „összetett Poisson folyamat" szerint érkeznek.)*

Ezt úgy is fel lehet fogni, hogy egy hallgató érkezése után $q = \frac{2}{3}$ valószínűséggel azonnal érkezik egy másik, a maradék $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont egy exponenciális véletlen időt kell kivárni, 20 perc várható értékkel.

Nézzük a folyamatot mint kiszolgálási sort, ahol az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, \dots \sim T$, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, \dots \sim S$.

a.) Mi S eloszlása?

b.) Mi T eloszlása? *(Itt kell észnél lenni!)* Mennyi T várható értéke? Mi T Laplace transzformáltja?

c.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?

d.) Hosszú távon az idő mekkora hányadában válaszol kérdésekre Móricka?

e.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban, *nem számítva* azt, akinek Móricka éppen válaszol?

f.) Móricka, valahányszor egy kérdésre válaszolt, és a hallgató éppen elment, kinéz az ajtón. Hosszú távon átlagosan hány embert lát sorban állni?

g.) Hosszú távon, átlagosan, az érkező hallgatók hány másik embert találnak maguk előtt a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?

h.) A sok hallgató átlagosan hány percet tölt sorban állással (nem számítva azt az időt, amikor Móricka már vele foglalkozik)?

i.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten állnak előtte a sorban?

j.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 10 perc alatt sorra kerül?

k.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc múlva már nincs is ott?

8.7 Pistikéék háza előtt reggelente a buszok λ intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek a játszótér irányából, és mennek tovább az iskola irányába. Egy ettől független μ intenzitású Poisson folyamat szerint viszont az iskola irányából érkeznek, és mennek a játszótér irányába.

Reggel 7-kor Pistike álmosan támolyog ki a ház elé, és felszáll az első arra járó buszra. Mennyi a valószínűsége, hogy a játszótér irányába utazik?

8.8 Legyenek $S \sim Exp(\mu)$ és $T \sim Exp(\lambda)$ független valószínűségi változók. Mennyi a $\mathbb{P}(S > T)$ valószínűség?

(Tipp: nem kell számolni. Aki mégis számolni szeretne, annak egy lehetséges megoldás (a sok közül) a teljes valószínűség tétel:

$$\mathbb{P}(S > T) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x)\mathbb{P}(S > T \,|\, T = x)\,\mathrm{d}x$$

ahol f_T a T sűrűségfüggvénye.)

8.9 Legyenek $S, T \geq 0$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $S \sim Exp(\mu)$. (T bármilyen eloszlású lehet, csak ne legyen negatív. Az érdekes eset az lesz, amikor T is exponenciális. Akinek az könnyebb, csinálja csak arra.) Legyen $U = S - T$ és legyen $u > 0$. Feltéve, hogy $U > 0$, mennyi a valószínűsége, hogy $U > u$?

Egész pontosan: kérdés a $\mathbb{P}(U > u \,|\, U > 0)$ feltételes valószínűség.

(Tipp: A kérdés persze átfogalmazható így: $\mathbb{P}(S > T + u \,|\, S > T) =?$)

8.10 Legyenek $S \sim Exp(\mu)$ és $T \sim Exp(\lambda)$ független valószínűségi változók, és legyen $U = S - T$.

a.) Számoljuk ki U sűrűségfüggvényét!

b.) Legyenek V, A és B független valószínűségi változók, $V \sim B(p)$, $A \sim Exp(\alpha)$, $B \sim Exp(\beta)$, és legyen

$$\tilde{U} = VA + (1 - V)(-B).$$

(Magyarul: Feldobunk egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége p. Ha az eredmény fej, akkor $\tilde{U}$-t α paraméterű exponenciálisnak választjuk; ha viszont írás, akkor β paraméterű exponenciálisnak, negatív előjellel.)

Hogyan kell megválasztani a p, α és β paramétereket, hogy U és $\tilde{U}$ *azonos eloszlású* legyen?

(Tipp: Bármelyik rész-feladat megoldásából azonnal adódik a válasz a másikra. Aki számolni szeret, kezdje az elsővel. Aki az előző pár feladatot megoldotta, kezdje a másodikkal.
Aki az elsővel kezdené, annak egy lehetséges megoldás (a sok közül) a teljes valószínűség tétel:

$$\mathbb{P}(U < u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x)\mathbb{P}(U < u \,|\, T = x)\,\mathrm{d}x$$

ahol f_T a T sűrűségfüggvénye, illetve

$$\mathbb{P}(U < u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x)\mathbb{P}(U < u \,|\, S = x)\,\mathrm{d}x$$

ahol f_S az S sűrűségfüggvénye. u előjelétől függ, hogy ezek közül melyik a kényelmesebb.)

8.11 Legyen $0 \leq C \leq 1$, $\gamma > 0$ és

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1 - Ce^{-\gamma x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

(Vagyis F egy hiányos exponenciális eloszlású X val.változó eloszlásfüggvénye: $1 - C$ val.séggel $X = 0$, a maradék val.séggel $X \sim Exp(\gamma)$.)

a.) Legyen $B \sim Exp(\lambda)$. Minden $x \geq 0$-ra számoljuk ki az $I_1(x) := \mathbb{E}(F(x+B))$ várható értéket.

b.) Legyen $A \sim Exp(\mu)$. Minden $x \geq 0$-ra számoljuk ki az $I_2(x) := \mathbb{E}(F(x-A))$ várható értéket.

(Tipp: Az eredmény tényleg csak $x \geq 0$-ra kell, és persze mindkét részfeladatnál ki kell használni, hogy $x \geq 0$.)

8.12 Legyenek $S \sim Exp(\mu)$ és $T \sim Exp(\lambda)$ független valószínűségi változók, és legyen $U = S - T$. Oldjuk meg az

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \mathbb{E}(F(x-U)), & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Lindley-féle integrálegyenletet. (Vagyis: keressük azt az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire az egyenlet teljesül.)

(Megjegyzés: előadásról tudjuk, hogy minek kell kijönni. Azért csak ellenőrizzük le, hogy az tényleg jó. Milyen μ és λ mellett lesz F eloszlásfüggvény?)

8.13 Móricka egyéni konzultációt tart a hallgatóinak. A hallgatók kérdéseire egyesével válaszol, minden hallgató (egyetlen) kérdésére az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő alatt, átlagosan 5 perc alatt. A kíváncsi hallgatók Poisson folyamat szerint érkeznek, átlagosan húszpercenként. Igen ám, de nem csak egyesével jöhetnek: előfordul, hogy több hallgató is jön *egyszerre*: konkrétan az érkezők száma mindig az előzményektől független, $p = \frac{1}{3}$ paraméterű geometriai eloszlású val.változó. *(Megjegyzés: Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a hallgatók „összetett Poisson folyamat" szerint érkeznek.)*

Ezt úgy is fel lehet fogni, hogy egy hallgató érkezése után $q = \frac{2}{3}$ valószínűséggel azonnal érkezik egy másik, a maradék $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont egy exponenciális véletlen időt kell kivárni, 20 perc várható értékkel.

Másfelől nem minden hallgató jut el a kérdezésig: mindegyikük, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel rossz konzultációra jött, és erre csak akkor jön rá, amikor sorra került. Akkor viszont azonnal kiderül a hiba, és a hallgató azonnal elmegy. (Más szóval: az egy hallgatóra fordítandó idő $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nulla, a maradék $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig exponenciális eloszlású 5 perc várható értékkel.)

Nézzük a folyamatot mint kiszolgálási sort, ahol az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, \dots \sim T$, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, \dots \sim S$.

a.) Mi S eloszlása?

b.) Mi T eloszlása?

c.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 10 perc alatt sorra kerül? *(Tipp: a várakozási idő határeloszlása hiányos exponenciális.)*