

Tömegkiszolgálás
mintaZH, 2021 tavasz

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

A ZH-n 5 feladat lesz, ami bármelyik 5 lehetne pl. az alábbiak közül:

1. Pistike, Jancsika és Móricka matricákat gyűjt, amiket a csokihoz adnak a boltban. Hatféle matrica van, minden csokihoz egyet adnak, mindegyiket azonos valószínűséggel (az előzményektől függetlenül).
 - a.) Pistikének már három féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy négyféle legyen?
 - b.) Jancsikának már k -féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy $(k+1)$ -féle legyen? (Itt $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.)
 - c.) Móricka csak most kezdi a gyűjtést. Mennyi a teljes matrica-készlet kigyűjtéséhez kibontandó csokik számának várható értéke és szórása?
2. Egy udvaron két kutya van, egymáshoz közel (Anna és Bella), rajtuk összesen 3 bolha. A bolhák az órát nézik, és minden percben, az előzményektől függetlenül, kiválasztanak maguk közül 1-et, aki átugrik az aktuális helyéről a másik kutyára – miközben a többiek maradnak, ahol voltak.

Kezdetben mind a 3 bolha Bellán van. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 120 perc elteltével minden bolha Annán lesz?
3. Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = z^5 e^{z-c}$, ahol $c \in \mathbb{R}$.
 - a.) Mennyi a c konstans értéke?
 - b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?
 - c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 100)$ valószínűség?
4. Józsi bácsi minden este feldob egy szabályos érmét, és ha az eredmény fej, akkor megiszik egy üveg bort – feltéve persze, hogy van a kamrában bor. Cserébe minden délelőtt elgurít egy szabályos dobókockát, és ha az eredmény 6-os, akkor elmegy a boltba, hoz K üveg bort és beteszi a kamrába. (Itt $K \in \{1, 2, 3, \dots\}$.) Hosszú távon átlagosan hány deket tölt Józsi bácsi kamrájában egy üveg bor? (A választ adjuk meg K függvényében!)
5. Jancsi egy listáról ZH-eredményeket diktál Juliskának, aki a Neptunba írja őket. Ciklusokban dolgoznak: egy ciklus során
 - Jancsi 5 másodperc alatt bemond egy nevet a listáról,
 - majd lediktálja 4 hallgató pontszámát, 5 másodpercenként egyet. (Vagyis a négyből három hallgató nevét Jancsi nem mondja be: bízik benne, hogy helyes sorrendben vannak a listán.)

- Ez után Juliska szintén 5 másodperc alatt visszajelez, hogy mindent jól értett-e.

(Így az egész ciklus $5+20+5=30$ másodpercig tart.) Ha Juliska mindent értett, akkor mennek tovább, ha viszont nem, akkor újrakezdik a ciklust.

Juliska a neveket és az egyes pontszámokat is 90% valószínűséggel érti, egymástól függetlenül.

- a.) Percenként hány pontszámot tudnak így beírni hosszú távon?
 - b.) Lehetne gyorsabban haladni, ha Jancsi nem 4-esével diktálná az eredményeket? Ha igen, hányasával lenne optimális?
6. Egy kis bankfiókban két ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Az ügyfelek Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 8-an. A szigorú járványügyi szabályok miatt egyszerre legfeljebb 5 ügyfél lehet bent (beleértve azokat is, akiket éppen kiszolgálnak): ha már 5-en bent vannak, és valaki érkezik, akkor nem engedik be és csalódottan távozik. Aki odakerül az ablakhoz, azt az érkezési folyamattól és az előzményektől független, 10 perc várható értékű, exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgálják ki, majd elégedetten távozik.
- Legyen $X(t)$ a fiókban lévő ügyfelek száma t idő elteltével. Az időt mérjük *órában*.
- a.) Rajzoljuk fel az $X(t)$ Markov lánc gráf-reprezentációját!
 - b.) Írjuk fel az $X(t)$ Markov lánc infinitezimális generátorát!
 - c.) Az ügyfelek hány százaléka távozik csalódottan hosszú távon?
7. Egy taxiállomásra a taxik kora reggeltől Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 8, beállnak a sor végére (ami bármilyen hosszú lehet), és türelmesen várnak az utasokra. A potenciális utasok is Poisson folyamat szerint érkeznek (a taxiktól függetlenül), óránként átlagosan 12-en. Ők nem várnak: ha van ott éppen taxi, akkor beülnek a sor elején lévőbe, de ha nincs, akkor elmennek gyalog.
- Móricka taxisofőr, és este 8-kor áll be a sorba. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy még este 9-kor is ott áll?