Tömegkiszolgálás

pótpótZH megoldások, 2021 tavasz, 2021.05.26, 10:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Pontozás általában:

- Minden feladat 8 pontot ér.
- A részpontszámok részletezve vannak az egyes megoldások után.
- Fő szabály: Ha valaki rossz irányba indul el – pl. hibásan ismeri fel az alkalmazandó modellt – és aztán a rossz irányban sok szép dolgot kiszámol, azért nem jár pont.
- Különösen vonatkozik ez arra, ha valaki olyat számol ki, ami a helyes megoldáshoz nem kell – pl. a 2-es vagy 5-ös feladatban a sorhossz várható értékét.

1. Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2z^6}{c-z}$, ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans.

   a.) Mennyi a c konstans értéke?

   b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

   c.) Mennyi X várható értéke?

   d.) Mennyi X szórása?

   e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 42)$ valószínűség?

   Megoldás:

a) Ha g generátorfüggvény, akkor $g(1)=1$, vagyis

$$\frac{2\cdot 1^6}{c-1}=1, \text{ amiből } \boxed{c=3}$$

$$\Rightarrow g(z)=\frac{2z^6}{3-z}.$$

Innentől

1. Könnyű megoldás: $g(z)=z^5\,\dfrac{2/3\,z}{1-\frac{1}{3}z}$, vagyis

$$g(z)=g_U(z)\,g_V(z), \text{ ahol } g_U(z)=z^5, \text{ vagyis } U\equiv 5$$

$$g_V(z)=\frac{2/3\,z}{1-\frac{1}{3}z}, \text{ vagyis } V\sim \mathrm{Geom}\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

Így ha ~~U~~ és V független, akkor $X\sim U+V$.

[Márpedig független, mert U determinisztikus, tehát mindentől független.]

b.) $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(5+V=1)=\mathbb{P}(V=-4)\overset{V\sim\mathrm{Geom}(\frac{2}{3})}{=\!=\!=}0.$

c.) $\mathbb{E}X=\mathbb{E}(5+V)=5+\mathbb{E}V=5+\frac{3}{2}=6.5$

d.) $\mathrm{D}X=\mathrm{D}(5+V)=\mathrm{D}V\overset{V\sim\mathrm{Geom}(\frac{2}{3})}{=\!=\!=}\sqrt{\dfrac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$

e.) $\mathbb{P}(X=42)=\mathbb{P}(5+V=42)=\mathbb{P}(V=37)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{36}=\frac{2}{3^{37}}$

$\approx 4.44\cdot 10^{-18}$ ~~$\approx 4.44\cdot 10$~~

② Ugyanez számolással:

$$g'(z) = 2\frac{6z^5(3-z) - z^6(-1)}{(3-z)^2} = 2\frac{18z^5 - 5z^6}{(3-z)^2}$$

$$g''(z) = 2\frac{(90z^4 - 30z^5)(3-z)^2 - (18z^5 - 5z^6)2(3-z)(-1)}{(3-z)^4}$$

$\Rightarrow g'(0) = 0$

$$g'(1) = 2\cdot\frac{18-5}{2^2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$g''(1) = 2\frac{(90-30)\cancel{2^2} + (18-5)\cdot 2\cdot 2}{2^{\cancel{4}2}} = \frac{73}{\cancel{2}}, \text{ amiből}$$

b.) $\mathbb{P}(X=1) = g'(0) = \underline{\underline{0}}$

c.) $\mathbb{E}X = g'(1) = \underline{\underline{6.5}}$

d.) $\operatorname{Var} X = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2 = \frac{73}{\cancel{2}} + \frac{13}{2} - \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{73+26}}{4}$

$$= \frac{146 + 26 - 169}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{DX = \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

e.) Fejtsük sorba $g(z)$-t:

$$g(z) = z^6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{2}{3} z^6 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k z^{6+k} \overset{\ell := k+6}{=\!=} \sum_{\ell=6}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-6} z^{\ell},$$

amiből $\mathbb{P}(X=\ell) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \ell \le 5 \\ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-6}, \text{ ha } \ell \ge 6. \end{cases}$

Konkrétan $\mathbb{P}(X=42) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{42-6} = \underline{\underline{\frac{2}{3^{37}}}}.$

Pontozás:

a.) 1 pont

b.) 1 pont

c.) 1 pont

d.) 2 pont, ebből 1 jár, ha jó az elindulás de nincs helyes végeredmény (pl. csak a szórásnégyzet van kiszámolva)

e.) 3 pont

2. Egy számítógépes hálózati elosztó kütyühöz 10 különböző forrásból érkeznek üzenetek. A kütyü ciklusokban működik: Δt ideig fogadja az üzeneteket és sorba állítja őket, majd ugyancsak Δt idő alatt továbbít közülük pontosan 1-et. Tárhelye bőven van, így a sor akármilyen hosszú lehet. A források ismerik a szabályt, ezért mindig csak a megengedett időintervallumban küldenek üzenetet, a Δt idő alatt egymástól és az előzményektől is függetlenül 0.06 valószínűséggel egyet, a maradék valószínűséggel egyet sem.

   Amikor elkezdjük figyelni, éppen a továbbítás következne, de a sor üres. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 10000 ciklus (vagyis $20000\Delta t$ idő) elteltével megint éppen üres?

   Bónusz feladat: Amikor elkezdjük figyelni, a kütyü éppen továbbított egy üzenetet, és a sor üres. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 10000 ciklus (vagyis $20000\Delta t$ idő) elteltével megint éppen üres?

   Megoldás:

A kütyünk egy egyszerű csomagkoncentrátor $M=10$ felhasználóval akik $p=0.06$ vd-séggel küldenek minden alkalommal.

$X_n :=$ a sorhossz az n-edik ciklus végén

[egészen pontosan: az érkezési időintervallum után, de még a továbbítás előtt.]

Erre teljesül az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ sorhossz-evolúciós egyenlet, ahol $V_n \equiv 1$.

$\boxed{Y_n \sim Bin(10; 0.06)}$ és függetlenek.

$\mathbb{E}Y = 10 \cdot 0.06 = 0.6 < 1 \Rightarrow$ a sor stabil,

$n = 10000$ hosszú idő, így az n lépés utáni sorhossz közel van a stac. eloszláshoz

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 0) \approx \mathbb{P}(X^{stac} = 0) \xlongequal[\text{van képlet}]{\text{üresjáratra}} 1 - \frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V} = 1 - 0.6 = 0.4}$$

Bónusz kérdés: A kiszolgálás utáni sorhossz legyen Z_n. Ekkor $\mathbb{P}(Z^{stac}=0)$-ra nincs előre gyártott képletünk, de még könnyű: $X_{n+1} = Z_{n+1} + Y_{n+1}$, vagyis

azaz: érkezés előtti

$X_{n+1} = 0 \Leftrightarrow Z_{n+1} = 0$ és $Y_{n+1} = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X^{stac}=0) = \mathbb{P}(Z^{stac}=0) \cdot \mathbb{P}(Y=0)$. Ezért $n = 1000$-re

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \approx \mathbb{P}(Z^{stac}=0) = \frac{\mathbb{P}(X^{stac}=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{0.4}{(0.94)^{10}} \approx 0.74$$

Pontozás:

- 1 pont a Markov lánc bevezetéséért
- 2 pont annak hangsúlyozásáért, hogy a sorhosszt az érkezések után, de még a kiszolgálás előtt kell nézni
- 1 pont az evolúciós egyenlet felírásáért
- 1 pont az evolúciós egyenletben szereplő mennyiségek helyes beazonosításáért
- 1 pont a kérdés helyes felismeréséért
- 1 pont a stabilitás megállapításáért és a rá való hivatkozásért
- 1 pont a képlet alkalmazásáért és a helyes végeredményért
- **Bónusz feladat: 2 pont**

3. Egy játékautóban 3 könnyen elromló, a működéshez elengedhetetlen alkatrész van. Ezek élettartama független exponenciális eloszlású 1 év, 2 év illetve 3 év várható értékkel. Javítani nem próbálják: ha elromlik, megy a kukába.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a játékautó 2 év után még működik?

   b.) Mennyi a játékautó várható élettartama?

   Megoldás:

Legyen X, Y és Z a 3 kritikus alkatrész élettartama években mérve: $X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(\frac{1}{2})$, $Z \sim Exp(\frac{1}{3})$ és függetlenek.

$$\lambda := 1 \qquad \mu := \frac{1}{2} \qquad \varrho := \frac{1}{3}$$

Így $U := \min\{X, Y, Z\}$ az autó élettartama.

a.) $\mathbb{P}(U > 2) = \mathbb{P}(X > 2, Y > 2, Z > 2) \overset{\text{függetlenség}}{=}$

$$= \mathbb{P}(X > 2) \cdot \mathbb{P}(Y > 2) \cdot \mathbb{P}(Z > 2) = e^{-\lambda \cdot 2} \cdot e^{-\mu \cdot 2} \cdot e^{-\varrho \cdot 2} =$$

$$= e^{-(\lambda + \mu + \varrho) 2} = e^{-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) 2} = \underline{e^{-\frac{11}{3}}} \approx 0.026$$

$$= \underline{\underline{2.6\%}}$$

b.) U független exponenciálisok minimuma, így maga is exponenciális $\lambda + \mu + \varrho = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ paraméterrel

$$\Rightarrow \underline{\mathbb{E}U} = \frac{1}{\frac{11}{6}} = \underline{\frac{6}{11} \approx 0.55 \text{ (év)}}$$

Pontozás:

a.) 4 pont – ebből 2 az alkatrészek élettartamának bevezetéséért és az exponenciális eloszlások paraméterének megállapításáért

b.) 4 pont – ebből 2 egy pontos indoklás nélküli intuitív jó megoldásért

4. Pistike autót vezet és dugóban araszol. A sebességváltó mindig az 1,2,3 fokozatok valamelyikében van: sose tud felkacsolni 4-esbe, de üresbe se teszi sose. 1-esből mindig 2-esbe kapcsol, átlagosan fél perc után. 2-esben átlagosan 1 percet tud menni, aztán $\frac{1}{3}$ valószínűséggel felkapcsol 3-asba, a maradék $\frac{2}{3}$ valószínűséggel 1-esbe kell visszakapcsolnia. 3-asban viszont mindig összetorlódik előtte a sor, és egészen 1-esig vissza kell kapcsolnia – átlagosan 1 perc után. (Az egyértelműség kedvéért: Pistike 1-esből 3-asba és 3-asból 2-esbe sose vált.)

a.) Modellezzük a sebességváltó állását folytonos idejű Markov lánccal: írjuk le, hogy mit jelölünk mivel, és legyen rögzítve az időegység.

b.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát!

c.) Amikor az időt mérni kezdjük, Pistike éppen 2-esben döcög. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 5 másodperccel később 3-asban halad?

d.) Amikor az időt mérni kezdjük, Pistike éppen 2-esben döcög. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy egy órával később éppen 3-asban halad?

e.) Pistike átlagsebessége 1-esben 10 km/h, 2-esben 20 km/h, 3-asban 40 km/h. Mennyi az átlagsebessége hosszú távon?

Megoldás:

a.) Legyen $X(t) \in \{1,2,3\}$ a sebességváltó állása $\underline{t \text{ perc}}$ elteltével. $S=\{1,2,3\}$ az állapottér.

b.) A feladat szerint Markov lánccal modellezünk $\Rightarrow$ a tartózkodási idők $\underline{\text{exponenciálisak}}$, λ_1, λ_2 ill. λ_3 rátával.

A várható értékek vannak adva: $\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\lambda_2}=1$; $\frac{1}{\lambda_3}=1$

Adottak még a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenet valószínűségei:

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

← 1-esből mindig 2-esbe

← 2-esből 2/3 val.séggel 1-esbe, 1/3 val.séggel 3-asba

← 3-asból mindig 1-esbe

Ebből az infinitezimális generátor:

$$G_{ij}=\begin{cases} -\lambda_i, & \text{ha } j=i \\ \lambda_i Q_{ij}, & \text{ha } j\neq i \end{cases} \Rightarrow G=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c.) $t=5\,s=\frac{1}{12}$ perc $\underline{\text{rövid}}$ idő

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X(t)=3\,|\,X(0)=2)\approx t\,\lambda_{23}=t\,G_{23}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{36}\approx 2.8\%$$

d.) $t=60$ perc hosszú idő. A Markov lánc folytonos idejű, véges állapotterű és irreducibilis $\Rightarrow$ a Markov láncok alaptétele szerint

$\mathbb{P}(X(t)=3) \approx \pi_3$, ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Ennek kereséséhez a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2/3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1/3} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Vagyis $\pi_2 = 3\pi_3$, $\pi_1 = \frac{\pi_2}{3} + \frac{\pi_3}{2}$, amiből $\pi = \text{const.}(3 \;\; 6 \;\; 2)$.

Normálás után $\boxed{\pi = \left(\frac{3}{11} \;\; \frac{6}{11} \;\; \frac{2}{11}\right)}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X(60)=3) \approx \pi_3 = \frac{2}{11} \approx 0.1818\ldots \hat{\approx} 18\%$

e.) Legyen $f: S \to \mathbb{R}$, $f(i)$ az i-edik sebesség-fokozatban az átlagsebesség $\left(\frac{km}{h}\right)$-ban. Oszlopvektorként: $f = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Az ergodtétel szerint hosszú távon $f(X(t))$ időátlaga 1 valószínűséggel $\overline{f(X(t))} = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \left(\frac{3}{11} \;\; \frac{6}{11} \;\; \frac{2}{11}\right) \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} =$

$= \frac{30+120+80}{11} = \frac{230}{11} \approx 20.9 \quad \left(\frac{km}{h}\right)$

Pontozás:

a.) 1 pont, ehhez el kell árulni, hogy mi a Markov lánc. Aki a későbbiekben legalább egyszer leírja, hogy $X(t)$, annak be kell vezetni a jelölést.

b.) 3 pont, ebből 1 a tartózkodási idő paraméterek megállapításáért; 1 a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixáért; 1 a generátor helyes összerakásáért

c.) 1 pont

d.) 2 pont, ebből 1 a stac.eloszlás helyes kiszámolásáért; 1 a Markov láncok alaptételére való hivatkozásért, a feltételek ellenőrzésével

e.) 1 pont, kell hozzá az ergodtétel néven nevezése

5. Egy hivatali ügyintézőhöz a feladatok egyesével érkeznek: két feladat érkezése között az eltelt idő az előzményektől független, exponenciális eloszlású. A feladatokat érkezési sorrendben végzi el: mindegyiket az előzményektől független exponenciális eloszlású idő alatt, átlagosan fél óra alatt. A feladatok elvégzésének határideje az érkezéstől számított 40 óra.

   (Megjegyzés: Ezt lehet úgy is érteni, hogy az ügyintéző csak heti 40 órában dolgozik, és amikor nincs munkaidő, akkor a feladatok elvégzése és érkezése is szünetel, a határidő pedig 1 hét.)

   a.) Az ügyintéző óránként átlagosan 0.8 feladatot kap. Hány százalékát tudja határidőre teljesíteni hosszú távon?

   b.) Legfeljebb mennyi lehet az ügyintéző terhelése (feladat/óra -ban), ha azt akarjuk, hogy a feladatok 99%-a határidőre meglegyen?

Megoldás:

Legyen $N(t)$ az ügyintézőre váró feladatok száma t óra elteltével. Ez egy $M/M/1$ kiszolgálási sor, az érkezési intenzitás legyen λ;

a kiszolgálás rátája adott: $\frac{1}{\mu} = E\left(\begin{matrix}\text{kiszolgálási} \\ \text{idő}\end{matrix}\right) = 2$

$\left(\frac{\text{feladat}}{\text{óra}}\right)$

A kérdés a késleltetésre vonatkozik:

Ha a rendszer stabil, az ergodtétel értelmében a hosszú távon határidőre teljesített feladatok aránya

$= \mathbb{P}(D^{stac} < 40)$, ahol D^{stac} a késleltetés stacionárius eloszlása. Előadásról tudjuk, hogy

$$\boxed{D^{stac} \sim Exp(\mu - \lambda)}$$, tehát

a.) Ha $\lambda = 0.8$ $\left(\frac{\text{feladat}}{\text{óra}}\right)$, akkor $D^{stac} \sim Exp(2-0.8) = Exp(1.2)$

(és persze a sor stabil),

$$\mathbb{P}(D^{stac} < 40) = 1 - e^{-1.2\cdot 40} = 1 - e^{-} \approx 1 - 1.4\cdot 10^{-21}$$

nagyon jó közelítéssel 100%.

b.) $\mathbb{P}(D^{stac} < 40) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)\cdot 40} = 0.99$ akkor teljesül,

ha $e^{-(\mu-\lambda)\cdot 40} = 0.01 \iff \lambda = \mu + \frac{\ln(0.01)}{40} \approx 2 - 0.115$

$= \underline{1.885}$

$\boxed{\text{Óránként átlagban legfeljebb } \underline{1.885} \text{ feladatot szabad rábízni.}}$

Pontozás:

a.) 5 pont – ebből 1 az M/M/1 modell felismerése; 1 a paraméterek helyes leolvasása; 1 a kérdés felismerése; 1 a késleltetés eloszlásának helyes megadása; 1 a helyes válasz

b.) 3 pont