

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
egyetlen ZH, 2023 ősz

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.
Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 9 pontot ér.

1. Mórlickához a hallgatóinak az e-mailjei Poisson folyamat szerint érkeznek, naponta átlagosan 1. Ő naponta legfeljebb 1-et hajlandó megválaszolni (mindig pontban éjfélkor). Ha ez után marad még megválaszolatlan levél a fiókjában, akkor azok türelmesen várnak a sorukra. Amikor legutóbb éjfélkor megnézte a levelezését, pontosan 1 levél várt rá (amit meg is válaszolt).
 - a.) Mennyi a valószínűsége, hogy előbb-utóbb lesz olyan éjfél, amikor a postaládáját üresen találja?
 - b.) Várható értékben hány nap múlva fogja a postaládáját először üresen találni?
2. Egy lépcsőházban éjjel-nappal ég egy villanykörte. Ha kiég, azonnal kicserélik. Az egyes körték élettartama független és exponenciális eloszlású, a várható érték fél év.
 - a.) Mennyi a valószínűsége, hogy jövőre 2-nél többször kell égőt cserélni?
 - b.) Pistike és Mórlicka ebben a lépcsőházban lakik. Amikor egy körte kiég, nekik kell kicserélni, ők pedig érmedobással döntenek arról, hogy melyikük csinálja. Tavaly Pistike 3 körtét is kicserélt. Mennyi a valószínűsége, hogy Mórlicka 1-et se?
3. Egy internetes kiszolgálóhoz 3 féle kérés érkezik: minden kérés $\frac{8}{10}$ valószínűséggel könnyű, $\frac{1}{10}$ valószínűséggel nehéz, és $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás, a többitől függetlenül. A könnyű kérések kiszolgálása pontosan 1 ms-ig tart, a nehezeké 10 ms-ig, a hibásaké 0 ideig. Jancsi a centrális határeloszlás tétel segítségével becsülte meg, hogy mekkora valószínűséggel kell az első 10000 kérés megválaszolásával legalább 20000 ms időt eltölteni. Legfeljebb mennyi lehet Jancsi becsülésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint?
4. Egy internetes kiszolgálóhoz 3 féle kérés érkezik: minden kérés $\frac{8}{10}$ valószínűséggel könnyű, $\frac{1}{10}$ valószínűséggel nehéz, és $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás, a többitől függetlenül. A könnyű kérések kiszolgálása pontosan 1 ms-ig tart, a nehezeké 10 ms-ig, a hibásaké 0 ideig. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy az első 10000 kérés megválaszolásával legalább 20000 ms időt el kell tölteni.
5. Egy kommunikációs csatornán csomagokat küldenek. Minden csomag a többitől függetlenül 0.001 valószínűséggel érkezik hibásan a fogadóhoz. Ilyenkor a hibát észlelik és a csomagot újraküldik – addig, amíg hibátlanul meg nem érkezik. A kommunikáció addig zajlik, amíg 100000 (százezer) csomag hibátlanul el nem jut a fogadóhoz. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy eddig 200-nál is több hibás csomag érkezik.