

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

pótZH, 2023 ősz

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 9 pontot ér.

1. Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{1}{3-cz}$.
 - a.) Mennyi a c paraméter értéke?
 - b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?
 - c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 100)$ valószínűség?
2. Pistike a kedvenc boltjának autósmatrica-gyűjtő akciójából egy trabantos reklám-matricára vágyik. Ezért egyesével veszi a matricákat a boltban addig, amíg meg nem sikerül egy trabantosot szereznie. Sajnos a boltban a matricák be vannak csomagolva, és mindegyik, amit megvesz, csak $1/100$ valószínűséggel trabantos, a többitől függetlenül. Amelyik nem trabantosnak bizonyul, azt Pistike elajándékozta valamelyik kistestvérének, Jancsinak vagy Juliskának – erről mindig egy szabályos érmedobással dönt.

Legyen X a Jancsi által kapott matricák száma. Határozzuk meg X generátorfüggvényét!

(Tipp: Egy lehetséges elindulás: legyen N a Pistike által elajándékozott matricák száma. Legyen $\xi_i = 1$, ha az i -edik ajándék-matricát Jancsi kapja, és $\xi_i = 0$, ha nem.)
3. Mórnickához a hallgatóinak az e-mailjei Poisson folyamat szerint érkeznek, naponta átlagosan 1. Ő minden e-mail érkezésekor azonnal feldob egy szabályos érmét: ha fej, akkor válaszol, ha írás, akkor az e-mailt olvasatlanul törli.
 - a.) Mennyi a valószínűsége, hogy (hétfő 0:00 órától számítva) több, mint 2 nap telik el az első email érkezéséig?
 - b.) Mennyi a valószínűsége, hogy (hétfő 0:00 órától számítva) több, mint 2 nap telik el az első válasz megírásáig?
 - c.) Múlt héten (hétfő 0:00 órától vasárnap 24:00 óráig) Mórnicka 5 e-mailre válaszolt. Mennyi a valószínűsége, hogy eközben egyet se törölt olvasatlanul?
4. Brobdingnag országában minden férfinak pontosan 3 gyereke születik. Minden gyerek a többitől függetlenül $1/2$ valószínűséggel fiú, és minden gyerek az apja vezetéknevét örökli. Pöttöm Móric, mielőtt az első gyereke születne, egyedül viseli a Pöttöm vezetéknevet. Mennyi a valószínűsége, hogy a Pöttöm vezetéknev előbb-utóbb eltűnik?
5. Irénke éjszaka a számítógépén játszásból puskával szörnyekre lövöldöz. Egy puskában 10 golyó van, így legfeljebb 10 szörnyet lehet vele lelőni, de Irénkének átlagosan csak 1-et sikerül. A győzelemhez 100 szörnyet kell lelőnie.
 - a.) Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy Irénke hiába használ el 400 puskát, mégse sikerül győznie!
 - b.) **Bónusz:** Hány puskára van szüksége, ha 99.9% erejéig biztos akar lenni a győzelemben? (Vagyis, hogy a kudarc valószínűsége biztosan 0.1% alatt legyen?)