$\boxed{1}$ a.) $g(1) = \frac{1}{3-c\cdot 1} = \frac{1}{3-c} = 1$ kell, hogy legyen $\Rightarrow \boxed{c=2}$,

$$g(z) = \frac{1}{3-2z}$$

b) $g'(z) = \frac{-1\cdot(-2)}{(3-2z)^2} \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X=1) = g'(0) = \frac{2}{(3-2\cdot 0)^2} = \frac{2}{9}}$

c.) 1. megoldás: $g(z) = \frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2z}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k z^k$

mértani sor összege!

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad \text{ahol } p_k = \mathbb{P}(X=k),$$

amiből $p_k = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ minden k-ra, konkrétan $k=100$-ra is:

$$\boxed{\mathbb{P}(X=100) = p_{100} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{100} \approx 8.199\cdot 10^{-19}}$$

2. megoldás: $g(z) = \frac{1}{3-2z} = \frac{1/3}{1-\frac{2}{3}z} = \frac{p}{1-qz}$ ahol $p = 1/3$,

ami pont a $\text{Pessz Geom}(p=\frac{1}{3})$ eloszlás generátorfv-e

$$\Rightarrow X \sim \text{Pessz Geom}(p=\tfrac{1}{3}) \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X=100) = \left(\frac{2}{3}\right)^{100}\cdot\frac{1}{3}}$$

2.) <u>1. megoldás:</u> Legyen N a Pistike által ajándékozott matricák száma. Ez éppen az első sikert (amikor trabantosat talál) megelőző kudarcok száma $\Rightarrow N \sim PesszGeom(p)$ ahol $p = \frac{1}{100}$.

$$\Rightarrow g_N(z) = \frac{p}{1-qz} \qquad q := 1-p$$

Legyen most $\varsigma_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik ajándék-matricát Jancsi kapja} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Ezzel $\varsigma_i \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ függetlenek egymástól és N-től is, így

$X = \sum_{i=1}^{N} \varsigma_i$ véletlen tagszámú összeg, és $g_\varsigma(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$

Jóóó!

Ebből $\boxed{g_X(z) = g_N(g_\varsigma(z)) = \frac{p}{1-q\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)} = \frac{1/100}{1-\frac{99}{100}\cdot\frac{1+z}{2}}}$

$$= \frac{1/100}{\frac{101}{200} - \frac{99}{200}z} \overset{\text{bővítek } \frac{200}{101}\text{-del}}{=} \boxed{\frac{2/101}{1-\frac{99}{101}z}}$$

<u>2. megoldás</u> Amikor egy új matrica érkezik, az mindig

$\frac{2}{200} = \frac{1}{100}$ val.séggel Pistikée lesz (mert trabantos),

$\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{99}{200}$ val.séggel Jancsié, és

ugyancsak $\frac{99}{200}$ val.séggel Juliskáé.

ez összesen $\frac{101}{200}$

<u>ÖTLET:</u> $\boxed{\text{Ha Juliska matricáit figyelmen kívül hagyjuk}}$, akkor a következő matrica mindig $\frac{2}{101}$ val.séggel Pistikée, $\frac{99}{101}$ val.séggel pedig Jancsié. X a Pistike első sikerét megelőző kudarcok száma

$$\Rightarrow X \sim PesszGeom\left(\frac{2}{101}\right) \Rightarrow \boxed{g_X(z) = \frac{2/101}{1-\frac{99}{101}z}}$$

3. A Poisson folyamat intenzitása $\lambda = 1 \left(\frac{darab}{nap}\right)$.

a.) Legyen $\cancel{X(2)}$ N_2 a 2 nap alatt érkezett emailek száma.

$$N_2 \sim Poi(2\cdot\lambda) = Poi(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{2 napnál több telik el az első érkezésig}) =$$

$$= \boxed{\mathbb{P}(N_2 = 0) = e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!} = \underline{e^{-2}} \approx 0.135 = 13.5\%}$$

AVAGY: legyen T az első érkezési idő, $T \sim Exp(\lambda)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(T > 2\,nap) = 1 - F_T(2\,nap) = e^{-\lambda\cdot 2\,nap} = \underline{e^{-2}}}$$

b.) A megválaszolt emailek maguk is Poisson-folyamatot alkotnak, ami az érkezési folyamat ritkítása $p = \frac{1}{2}$ megtartási valószínűséggel $\Longrightarrow$ a ritkított folyamat intenzitása

$$p\cdot\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{1}{nap}.$$

Legyen M_2 a 2 nap alatt megválaszolt emailek száma.

$$M_2 \sim Poi\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = Poi(1) \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(M_2 = 0) = e^{-1} \approx 0.368 = 36.8\%}$$

AVAGY: legyen S az első válaszig eltelt idő: $S \sim Exp(p\lambda)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(S > 2\,nap) = 1 - F_S(2\,nap) = e^{-p\lambda\cdot 2\,nap} = \underline{e^{-1}}}$$

c.) A megválaszolt ill. törölt emailek az érkezési folyamat szinezése $\Rightarrow$ maguk is Poisson-folyamatok és $\boxed{\text{függetlenek}} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{1-et se törölt} \mid \text{5-re válaszolt})} \xlongequal{\text{ftl-ség}} \mathbb{P}(\text{1-et se törölt}) \xlongequal[\text{a b.) részben}]{\text{pont mint}} \boxed{e^{-\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot 7\,nap} = \underline{e^{-3.5}} \approx 0.030 = \underline{3\%}}$$

4.

A név fennmaradása szempontjából csak a fiú utódok számítanak. Legyen hát Z_n a Pöttöm Máric ~~egyenesági~~ fiú leszármazottainak száma az n-edik generációban.

Ez a Z_n a feladat szövege szerint Galton-Watson ~~szétválási~~ elágazó folyamat. Az egylépéses utódszám-eloszlás:

$X :=$ a fiú gyerekek száma: $\boxed{X \sim Bin(n=3, p=\frac{1}{2})}$, mert 3 gyerek egymástól ftl-ül $\frac{1}{2}$ val-séggel lesz fiú.

$\Rightarrow$ generátorfüggvénye $g(z) = (p+qz)^n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)^3 = \left(\frac{1+z}{2}\right)^3$.

Mivel $m := \mathbb{E}X = np = \frac{3}{2} > 1$, a folyamat szuperkritikus

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{kihalás}) < 1$ és sajnos számolni kell:

$r_0 = \mathbb{P}(\text{kihalás})$ a $z = g(z)$ fixpont-egyenlet legyetlen ($[0,1)$-beli) megoldása:

$$z = \frac{(1+z)^3}{8} \iff 8z = (1+z)^3 = z^3+3z^2+3z+1$$

$$\iff \boxed{z^3+3z^2-5z+1=0}$$ Ez egy rbmisztó 3-adfokú egyenlet, de tudjuk, hogy

$z = 1$ az egyik megoldása $\Rightarrow$ a baloldalból $(z-1)$ kiemelhető:

$$(z-1)(z^2+4z-1) = 0 \Rightarrow \underline{z=1} \vee \underline{z} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2+4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{20}}{2} = \underline{-2\pm\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$ az egyetlen $[0,1)$-beli megoldás

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = r_0 = -2+\sqrt{5} \approx 0.236 = 23.6\%}$$

5. a) Legyen ~~n=100~~ $n=400$ és $i=1,2,\dots,n$-re legyen X_i az i-edik paskóval lelőtt szörnyek száma.

A feladat szerint $\underset{a_i}{0} \le X_i \le \underset{b_i}{10}$ és $\mathbb{E}X_i = 1$

$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ a 400 paskóval összesen lelőtt szörnyek száma,

erre $\mathbb{E}S_n = n\,\mathbb{E}X_1 = 400$.

A Hoeffding egyenlőtlenség szerint (Tfh az X_i-k függetlenek!)

$$\mathbb{P}(\text{nem sikerül}) = \mathbb{P}(S_n < 100) \overset{t:=300}{=\!=} \mathbb{P}(S_n < \mathbb{E}S_n - t) \le$$

$$\le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2\cdot 300^2}{400\cdot(10-0)^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2\cdot 3\cdot 100\cdot 3\cdot 100}{4\cdot 100\cdot 100}\right) = e^{-4.5} \approx 0.011 = 1.1\%$$

b.) Minden ~~n-re~~ $n > 100$-ra $\quad \mathbb{E}S_n = n \Rightarrow t := n-100$

$$\mathbb{P}(n \text{ paskóval nem sikerül}) = \mathbb{P}(S_n < 100) = \mathbb{P}(S_n < \mathbb{E}S_n - t) \le$$

$$\le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2\cdot(n-100)^2}{n\cdot(10-0)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2(n-100)^2}{100n}\right),$$

és ez akkor $\le 0.1\% = 0.001$, ha

$$\exp\left(-\frac{2(n-100)^2}{100n}\right) \le 0.001 \iff -\frac{2(n-100)^2}{100n} \le \ln(0.001) = -3\ln 10$$

$$\iff (n-100)^2 \ge \frac{300}{2}\ln 10\cdot n \iff n^2 - 200n + 10000 \ge 150\ln 10\cdot n$$

$$n^2 - (200 + 150\ln 10)n + 10000 \ge 0$$ zérushelyek: $n \approx 576.4$; $n \approx 38$, de persze $n > 100$

$\Rightarrow \boxed{n \ge 577}$ biztosan jó.