① a.) $X \sim Uni(\{1,2,3,4,5,6\}) \Rightarrow g_X(z) = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6 = \frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6}$

b.) $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ ahol $X_i \sim Uni(\{1,\dots 6\})$ függetlenek $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g_Y(z) = \left(g_X(z)\right)^{10} = \left(\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6}\right)^{10}$$

c.) $Z \sim Geom\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow g_Z(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{1-\frac{5}{6}z} = \frac{z}{6-5z}$

② a.) $Z_1 = X$, ahol

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow g_1(z) = g_X(z) = \frac{z+z^2+z^3+z^4}{4}$$

b.) $m := \mathbb{E}X = 2{,}5 \Rightarrow \mathbb{E}(Z_5) = m^5 = 2{,}5^5$

c.) Mivel mindenkinek legalább 1 utóda születik, $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 0$.

③ Az esések Poisson-folyamattal modellezhetők, $\lambda = 6$ ~~rátával~~ intenzitással (ha az időt órákban mérjük). A különböző típusú esések (sérülés szempontjából) ennek szinezései, így ezek is független Poisson-folyamatokat alkotnak.

a.) $X :=$ az esések száma $\frac{1}{2}$ óra alatt.

$$X \sim Poi\left(\frac{1}{2}\cdot 6\right) = Poi(3) \Rightarrow \mathbb{P}(X<2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = e^{-3}(1+3)$$

b.) $Y :=$ a térd-beverések száma $\frac{1}{2}$ óra alatt

$$Y \sim Poi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\right) = Poi\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \mathbb{P}(Y=0) = e^{-3/2}$$

–folyt–

(3) c.) $U :=$ ahányszor a könyökét tegnap 2 óra alatt beütötte

$V :=$ ahányszor tegnap ~~könyö~~ 2 óra alatt

könyök-beverés nélkül elesett.

$Z :=$ ahányszor tegnap összesen elesett.

Így $Z = U + V$, $Z \sim Pei(\overset{12}{2 \cdot 6})$, de ~~m~~ nem ez az érdekes,

hanem hogy U és V a Z szeletései, ezért

$$\left.\begin{array}{l} U \sim Pei(\frac{1}{3} \cdot 12) = Pei(4) \\ V \sim Pei(\frac{2}{3} \cdot 12) = Pei(8) \end{array}\right\} \text{és függetlenek}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X > 6 \mid U = 4) = \mathbb{P}(U + V > 6 \mid U = 4) = \mathbb{P}(V > 2 \mid U = 4) \overset{\text{függet-}}{\underset{\text{lenség}}{=}}$$

$$= \mathbb{P}(V > 2) = 1 - \left[\mathbb{P}(V=0) + \mathbb{P}(V=1) + \mathbb{P}(V=2)\right] = 1 - e^{-8}\left(1 + 8 + \frac{8^2}{2}\right)$$

(4) Legyen X_i az i-edik ugrás méterben ~~jobbra~~ előre:

x	-1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$n = 800$ az ugrások száma, $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ a bolha helye 800 ugrás után. Tfh $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek. A kérdéses valószínűség:

$R = \mathbb{P}(S_n > 1000)$. Az X_i-k eloszlásának jellemzői:

- $m := \mathbb{E}X_i = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$
- $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}((X_i - m)^2)} = \sqrt{\frac{1}{3}(-1-1)^2 + \frac{2}{3}(2-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 1} = \sqrt{2}$
- $\delta = \mathbb{E}(|X_i - m|^3) = \frac{1}{3}|-1-1|^3 + \frac{2}{3}|2-1|^3 = \frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{10}{3}$

$\overset{\text{Berry-Esseen}}{\Longrightarrow}$ R CHT becslésének hibája $\leq \frac{C\delta}{\sqrt{n}\sigma^3} = \dfrac{0{,}4748 \cdot \frac{10}{3}}{\sqrt{800} \cdot \sqrt{2}^3} = \dfrac{4{,}748}{3 \cdot 80} = \dfrac{0{,}4748}{24} \approx 2\%$

(5) Legyen X_i az i-edik ugrás előre méterben:

x	-1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Így $m := \mathbb{E}X_i = \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{2}{3}\cdot 2 = 1$, továbbá $a_i := -1 \le X_i \le b_i := 2$

$n = 800$, $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ jelöléssel $R = \mathbb{P}(S_n > 1000) = \mathbb{P}(S_n \ge ES_n + t)$

$\mathbb{E}S_n = nm = 800$ ahol $\underline{t := 200}$

Tegyük fel, hogy az X_i-k függetlenek.

$\Longrightarrow$ a Hoeffding egyenlőtlenség miatt

$$R = \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2\cdot 200^2}{800\cdot(2-(-1))^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\cancel{2\cdot2}\cdot 2\cdot \cancel{100}\cdot 100}{\cancel{8\cdot 100}\cdot 3^2}\right) = e^{-\frac{100}{9}} \approx e^{-11.11} \approx 1.5\cdot 10^{-5}$$

(5) <u>alternatív megoldás</u>: Legyen $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik ugrás előre történik} \\ 0, & \text{ha hátra} \end{cases}$,

$n = 800$, így $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ az előre ugrások száma — amiből persze a hátra ugrások száma $n - S_n$, így a bolha helye n ugrás után $S_n \cdot 2 + (n - S_n)\cdot(-1) = 3S_n - n$

$\Rightarrow R = \mathbb{P}(3S_n - n > 1000) = \mathbb{P}(3S_n > 1000 + n = 1800) = \mathbb{P}(S_n > 600)$

és $X_i \sim B(\frac{2}{3})$ függetlenek, így R becslésére a Hoeffding egyenlőtlenség és a Cramér tétel is könnyen használható. A Hoeffding-ből persze pont ugyanaz jön ki, mint az 1. megoldás, a Cramér tétel kicsit erősebb becslést ad:

5 folytatás

$\mathbb{E}X_i = \frac{2}{3} =: m$, így

$$R = \mathbb{P}(S_n > 600) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{600}{800}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{3}{4}\right) \overset{a:=3/4}{\underset{b:=\infty}{=}}$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a,b)\right) \overset{a>m}{\underset{\text{Cramér}}{\leq}} e^{-nI(a)} = e^{-800\cdot I\left(\frac{3}{4}\right)} \quad \text{, ahol}$$

I a $p = \frac{2}{3}$ paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$

$$\Rightarrow I\left(\frac{3}{4}\right) \overset{x=\frac{3}{4}}{\underset{p=\frac{2}{3}}{=}} \frac{3}{4}\ln\frac{3/4}{2/3} + \left(1-\frac{3}{4}\right)\ln\frac{1-3/4}{1-2/3} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\frac{9}{8} + \frac{1}{4}\ln\frac{3}{4} \approx 0.0164168$$

$$\Rightarrow R \leq e^{-800\cdot I\left(\frac{3}{4}\right)} \approx e^{-13.133} \approx \underline{1.98\cdot 10^{-6}}$$