

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2023. december 12. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

1. a.) Pistike elgurít egy szabályos dobókockát. A dobott számot jelölje X . Mi X generátorfüggvénye?
b.) Pistike elgurít 10 szabályos dobókockát. Jelölje Y a dobott számok összegét. Mi Y generátorfüggvénye?
c.) Pistike addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg ki nem jön a 6-os. Jelölje Z a szükséges dobások számát. Mi Z generátorfüggvénye?
2. Móricka az írásbeli vizsgán kapkod. Egy feladattal pontosan 3 percet tölt, majd $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a következő feladatra ugrik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig az előzőre. Kivétel ez alól, ha már az utolsó feladatnál jár, mert akkor biztosan az előzőre ugrik, vagy ha az elsőnél jár, mert akkor biztosan a másodikra. A vizsgán 5 feladat van, és Móricka a munkát az elsővel kezdi.
 - a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc elteltével éppen a 2-es feladattal foglalkozik?
 - b.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy Móricka 91 perc elteltével éppen a 2-es feladattal foglalkozik?
3. Egy fodrászüzletben két fodrász dolgozik, mindkettőjüknél legfeljebb 1 vendég ülhet egyszerre. Ezen felül van az előtérben egyetlen szék, ahol egy vendég várakozhat, ha mindkét fodrász foglalt, amíg sorra nem kerül. Ha ez a szék is foglalt, akkor az esetlegesen érkező újabb vendégek csalódottan távoznak. Mindkét fodrász minden hozzá kerülő vendég haját véletlen idő alatt nyírja le, 15 perc várható értékű exponenciális eloszlással, az előzményektől függetlenül. A vendégek pedig Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 10-en. Legyen $X(t)$ az üzletben tartózkodó vendégek száma t óra elteltével. Így $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc.
 - a.) Mi $X(t)$ állapottere?
 - b.) Rajzoljuk fel $X(t)$ gráf reprezentációját!
 - c.) Írjuk fel $X(t)$ infinitezimális generátorát!
 - d.) 10:00:00-kor pontosan egy ember van bent, vagyis az egyik fodrász dolgozik, a másik vár, az előtér üres. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 10:00:30-kor már nem ez a helyzet?
 - e.) Hosszú távon az idő mekkora hányadában foglalt az előtérben lévő szék?
4. Az X valószínűségi változó eloszlásáról tudjuk, hogy $X \in (0, 1)$ biztosan, és $(0, 1)$ -en a sűrűségfüggvénye $f(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ alakú, ahol $\alpha > 0$ paraméter, ám az értékét nem ismerjük. Mintát vettünk X -ből, és azt kaptuk, hogy 0.5394; 0.7116; 0.2191; 0.0009; 0.6976. Adjunk maximum likelihood becslést α -ra!
5. Egy pékségben a félkilós buciba kerülő só mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó, általunk nem ismert várható értékkel és szórással. Mintát vettünk a buciból, megmértük a sótartalmakat, és a következő értékeket kaptuk (gramm-ban): 10.1; 9.8; 9.7; 10.4; 10.1; 10.2; 9.5; 10.0; 9.9; 10.2. Vizsgáljuk meg 95%-os szinten a pékségnek azt az állítását, mint hipotézist, hogy a várható érték legfeljebb 10 (gramm).

Segítség: Az adatsor elemeinek összege 99.9, négyzeteik összege 998.65.