① a.) $\boxed{g_X(z)} = \sum_k \mathbb{P}(X=k) z^k = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6 = \boxed{\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6}}$

b.) Független val. változók összegének generátorfüggvénye a tagok generátorfüggvényeinek szorzata,

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ ahol X_i az i-edik dobott szám

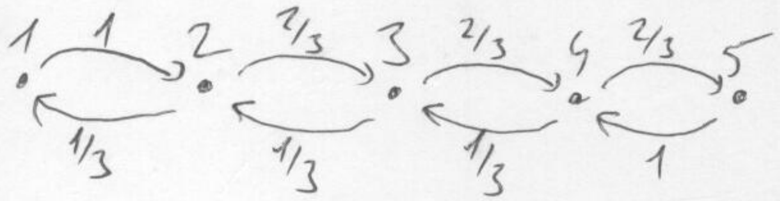
$X_1, \dots, X_{10}$ ftl $\sim X$

$\Rightarrow \boxed{g_Y(z)} = (g_X(z))^{10} = \boxed{\left(\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6}\right)^{10}}$

c.) $Z \sim Geom\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \boxed{g_Z(z)} = \frac{pz}{1-qz}$ ahol $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$

$= \frac{\frac{1}{6}z}{1-\frac{5}{6}z} = \boxed{\frac{z}{6-5z}}$

② Legyen $X_n \in \{1,2,3,4,5\}$, hogy Móricka hanyadik feladat-nál jár az n-edik ugrás után. Ez az X_n a feladat szövege szerint Markov lánc, gráf-reprezentációja



És tudjuk, hogy $X_0 = 1$

a.) $\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid X_0 = 1)} \xrightarrow[\text{trajektória}]{\text{2-féle lehetséges}} \mathbb{P}(1\,2\,1\,2) + \mathbb{P}(1\,2\,3\,2)$

10 perc alatt 3-szor ugrott

$$= P_{12} P_{21} P_{12} + P_{12} P_{23} P_{32} = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \overset{1}{\cancel{\tfrac{4}{3}}} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \cancel{\frac{4}{9}}\ \boxed{\frac{5}{9}}$$

b.) X_n periodikus $d=2$ periódussal: páros sok ugrás után X_n csak páratlan lehet, páratlan sok ugrás után pedig csak páros. 91 perc alatt 30 ugrás történik $\Rightarrow$ ~~$\mathbb{P}(X_{30}$~~ a kérdés $\mathbb{P}(X_{30} = 2) = ?$

És 2 páros, 30 páros, így $\boxed{\mathbb{P}(X_{30} = 2) = 0}$

③

a.) $S = \{0, 1, 2, 3\}$: ennyi vendég lehet bent egyszerre.

b.) ~~mindig 10 az érkezési rátája~~

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "10"] & 1 \arrow[l, bend left, "4"] \arrow[r, bend left, "10"] & 2 \arrow[l, bend left, "8"] \arrow[r, bend left, "10"] & 3 \arrow[l, bend left, "8"]
\end{tikzcd}$$

Indoklás: • $\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 10$ a vendégek érkezési rátája ($\frac{1}{\text{óra}}$ -ban mérve)

• $\lambda_{10} = 4$, mert ha 1 vendég van bent, akkor őt 1 fodrász nyírja, és $Exp(4)$ eloszlású idő alatt végez (az idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{4}$ óra)

• $\lambda_{21} = \lambda_{32} = 2 \cdot 4 = 8$, mert ha 2 vagy 3 vendég van bent, akkor 2 fodrász dolgozik és közülük az egyik elkészültének rátája a külön-külön ráták összege

c.) $G = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & 10 & 0 \\ 0 & 8 & -18 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$ a főátlón kívül a λ_{ij} ugrási ráták; a főátlóban negatív számok, hogy minden sorösszeg 0 legyen

③ folytatás

d.) Legyen 10:00:00-kor $t=0$, így a kérdés

$\Delta t = (30 \text{ másodperc} =) \frac{1}{120}$ (óra) elteltével

$\mathbb{P}(X(\Delta t) \neq 1 \mid X(0)=1)$. Mivel Δt rövid idő, ez

a valószínűség $\approx \mathbb{P}(\Delta t$ idő alatt történik ugrás 1-ből$)$

$\approx \lambda_1 \cdot \Delta t$ ahol $\lambda_1 = 14$ az 1-es állapotból való

elugrási rátája:

$$\boxed{\mathbb{P}(X(\tfrac{1}{120}) \neq 1 \mid X(0)=1) \approx 14 \cdot \frac{1}{120} = \underline{\underline{\frac{7}{60}}} \approx 0.12 = \underline{\underline{12\%}}}$$

e.) A kérdés a 3-as állapotban hosszú távon eltöltött idő hányada. Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint 1 valószínűséggel $\lim_{T \to \infty} \frac{T\text{-ig 3-ban töltött idő}}{T} = \Pi_3$ ahol Π az egyetlen stacionárius eloszlás. Mivel $X(t)$ születési-halálozási folyamat, minden i-re $\Pi_i \lambda_{i,i+1} = \Pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$, esetünkben $\Pi_0 \cdot 10 = \Pi_1 \cdot 4$; $\Pi_1 \cdot 10 = \Pi_2 \cdot 8$; $\Pi_2 \cdot 10 = \Pi_3 \cdot 8$,

amiből $\Pi = \text{const} \cdot (256 ; 640 ; 800 ; 1000) \underset{\text{1 legyen,}}{\overset{\text{összeg}}{=}}$

$256 = \frac{4}{10} \cdot 640$, $640 = \frac{8}{10} \cdot 800$, $800 = \frac{8}{10} \cdot 1000$

$256+640+800+1000 = 2690$

$= \left(\frac{256}{2696} ; \frac{640}{2696} ; \frac{800}{2696} ; \frac{1000}{2696}\right) = \left(\frac{32}{337} ; \frac{80}{337} ; \frac{100}{337} ; \frac{125}{337}\right) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Hosszú távon az idő $\Pi_3 = \frac{125}{337} \approx 0.37 = 37\%$-ában foglalt a pótszék.

4) A likelihood-függvény (n=5 ~~e~~ elemű mintával)

$$L(\alpha) = L(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i) \quad \text{ahol } \cancel{\alpha}\, f_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

(ha $x \in (0,1)$, de szerencsére minden x_i-nk ilyen).

Ennek maximumhelyét keressük, érdemes a logaritmusát venni:

$$\ln f_\alpha(x) = \ln(\alpha x^{\alpha-1}) = \ln\alpha + (\alpha-1)\ln x$$

$\Rightarrow$ a log-likelihood függvény

$$\ell(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\alpha(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\alpha + (\alpha-1)\ln x_i\right]$$

$$= n\ln\alpha + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

Maximum csak ott lehet, ahol a derivált nulla:

$$\ell'(\alpha) = n\cdot\frac{1}{\alpha} + 1\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha_{ML} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}}$$

ez egyetlen lehetséges lokális max.-hely $\Rightarrow$ egyben a globális maximumhely.

Esetünkben $n=5$, $\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = \ln 0.5394 + \ln 0.7118 + \ldots + \ln 0.6976$

$$\approx -9.8490$$

$\Rightarrow$ α maximum likelihood becslése $\boxed{\alpha_{ML} \approx \frac{-5}{-9.8490} \approx 0.508}$

[Megjegyzés: a mintát igazából egy $\alpha = 0.5$ paraméterű eloszlásból generáltam.]

(5) Az átlag $\bar{x} = \frac{99.9}{10} = 9.99 < 10$, így a minta a hipo-
tézist megerősíti $\Rightarrow$ **ELFOGADJUK.**

[Amúgy egymintás egyoldali t-próbát kellene végezni
$\varepsilon = 0.05 \Rightarrow 1-\varepsilon = 95\%$ konfidenciaszinttel.]