1

1. megoldás

X eloszlása az $M \sim Poi(3)$ Poisson eloszlásának ritkítása, a pontok $p = \frac{2}{3}$ részét tartjuk meg véletlenszerűen $\Longrightarrow$ előadásból tudjuk, hogy $\boxed{X \sim Poi\left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) = Poi(2)}$

2. megoldás

$X = \sum_{i=1}^{M} \xi_i$ véletlen tagszámú összeg,

$M \sim Poi(\lambda) \Rightarrow g_M(z) = e^{\lambda(z-1)}$ ahol $\lambda = 3$

$\xi_i \sim Bin(p) \Longrightarrow g_\xi(z) = q + pz$ ahol $p = \frac{2}{3}$, $q = 1-p$

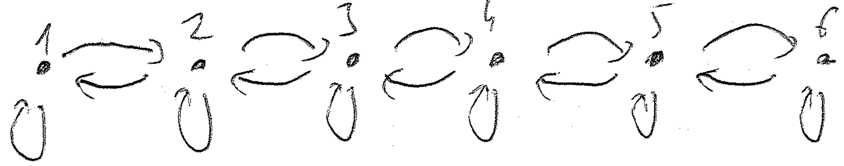
$$\xrightarrow[\text{velt}]{\text{tétel}} g_X(z) = g_M(g_\xi(z)) = e^{\lambda[q+pz-1]} = e^{\lambda(pz-p)} =$$

$$= e^{\lambda p(z-1)}$$, ami pont a $Poi(p \cdot \lambda)$ eloszlás generátorfüggvénye

$\Downarrow$

$$\boxed{X \sim Poi(p \cdot \lambda) = Poi(2)}$$

② a.) A gráf-reprezentáció



Látszik, hogy 4 lépésben sehogy se lehet eljutni 1-ből 6-ba $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(X_4=6 \mid X_0=1)=0}$

b.) A P mátrixban nem csak minden sorösszeg, hanem minden oszlopösszeg is 1, vagyis P bisztochasztikus $\Longrightarrow$ a $\pi = \left(\frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\right)$ egyenletes eloszlás stacionárius.

Mivel X_n véges állapotterű irreducibilis és aperiodikus, a Markov láncok alaptétele szerint π az egyetlen stacionárius eloszlása, és a nagy $n=100$-ra

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n=6 \mid X_0=1) \simeq \pi_6 = \frac{1}{6}}$$

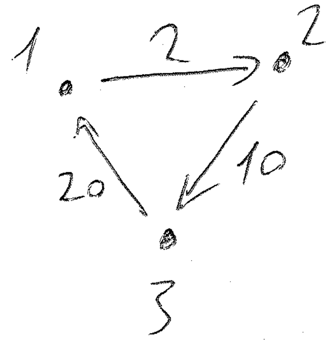
③ a.) Az 1→2 ugrás rátája az ~~érkezési~~ folyamat intenzitása, vagyis $2 \left(\frac{\text{darab}}{\text{perc}}\right) = \lambda_{12}$

A 2→3 ugrás rátája $\lambda_{23} = \frac{1}{E(\text{stamdási idő})} = \frac{1}{6\,\text{sec}}$

$= 10 \left(\frac{1}{\text{perc}}\right)$

A 3→1 ugrás rátára $\lambda_{31} = \frac{1}{E(\text{kommunikáció-idő})} = \frac{1}{3\,\text{sec}} = 20 \left(\frac{1}{\text{perc}}\right)$

Más ugrás nincs, így a gráf-reprezentáció



b.) Ebből $G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 \\ 20 & 0 & -20 \end{pmatrix}$

c.) $X(t)$ ~~folytonos idejű~~, irreducibilis és ~~aperiodikus~~ véges állapotterű $\Longrightarrow$ az ergodtétel szerint az 1-es állapotban eltöltött idő az összeshez képest hosszú távon π_1, ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Ez a $G^T \pi^T = 0$ egyenletrendszer megoldása.

③ – folytatás –

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 20 & 0 \\ 2 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{10} & \cancel{-20} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

vagyis $\Pi_1 = 10\,\Pi_3$, $\Pi_2 = 2\,\Pi_3$ $\Rightarrow$ pl. $\Pi_3 := 1$ választással

$\Pi = (10 \quad 2 \quad 1)$ megoldás, de nekünk normált

megoldás kell: $\Pi = \left(\boxed{\frac{10}{13}} \quad \frac{2}{13} \quad \frac{1}{13}\right)$

$\Rightarrow$ 1 valószínűséggel $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{T\text{-ig 1-ben eltöltött idő}}{T} = \Pi_1 = \dfrac{10}{13}$

$\approx 0{,}77 = 77\%$

④ A sűrűségfüggvény $f_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}$ (ha $x > 0$)

$\Rightarrow$ a log-likelihood függvény az $n = 5$ elemű mintára

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln 2 + \ln\theta + \ln x_i - \theta x_i^2\right]$$

$= n\ln 2 + n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, ennek maximum-helyét keressük. Ehhez θ szerint deriválunk:

$$\ell'(\theta) = 0 + \frac{n}{\theta} + 0 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff \boxed{\theta_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

az egyetlen lehetséges lokális szélsőértékhely, így persze ez az abszolút maximumhely is.

Esetünkben $n = 5$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.9113^2 + \dots + 0.3713^2 = 1.44458861$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{ML} = \frac{5}{1.44458861} \approx 3.46}$$

(5) Egymintás kétoldali u-próbát végzünk, a null-hipotézis

$H_0: \ m = 37 =: \mu$

Adatok: $\sigma = 0.3$, $n = 5$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 186 \Rightarrow \bar{x} = \frac{186}{5} = 37.2$,

~~A teszt~~

a konfidenciaszint 95% $\rightarrow \varepsilon = 0.05$

A teszt-statisztika

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{37.2 - 37}{0.3} \sqrt{5} = \frac{2}{3} \sqrt{5} \approx 1.49$$

A küszöbérték $\phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) \approx 1.96 =: K$

Döntés: $|u| \leq K \Rightarrow$ a H_0 null-hipotézis elfogadjuk.