

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2024. január 9. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

1. Pistike első körben 3-szor dob egy szabályos érmével. Ezután minden körben annyiszor dob, ahány fej az előző körben kijött. Legyen X_n az n -edik körben dobott fejek száma.

a.) Mi X_1 generátorfüggvénye?

b.) Mi X_2 generátorfüggvénye?

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy Pistike az idők végezetéig dobálja az érmét?

2. A szabályos dobókockán a szemközti lapokon lévő számok összege mindig 7. Jancsi egy szabályos dobókockát görget lassan az asztalon: a kocka két lépés között mindig valamelyik lapján áll, és Jancsi minden lépésben egy vaktában választott szomszédos lapjára billenti át. Kezdetben az 1-es szám van felül. Jelöljük X_n -nel, hogy n billentés után melyik szám kerül felülre.

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

b.) $\mathbb{P}(X_3 = 1) = ?$

c.) Körülbelül mennyi a $\mathbb{P}(X_{999} = 1)$ valószínűség?

3. A folytonos idejű $X(t)$ Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$, infinitezimális generátora

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

és $X(0) = 1$.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 5 időegység alatt nem történik ugrás?

b.) Feltéve, hogy $t = 0$ és $t = 5$ között 3 ugrás történik, mennyi a valószínűsége, hogy $t = 0$ és $t = 10$ között 4?

c.) Feltéve, hogy $t = 0$ és $t = 10$ között 4 ugrás történik, mennyi a valószínűsége, hogy $t = 0$ és $t = 5$ között 3?

4. Egy kiránduláson 4 gyerek megy az ösvényen libasorban. Mórícának sehogyan se jó: minden perc elteltével helyet cserél az egyik vaktában választott szomszédjával (ha éppen csak 1 szomszédja van, akkor azzal az 1-gyel).

a.) Kezdetben Móricka leghátul volt. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 csere után legelől lesz?

b.) Hosszú távon az idő hány százalékában megy Móricka legelől?

5. Az X valószínűségi változó eloszlásáról tudjuk, hogy $X \in (0, \infty)$ biztosan, és $(0, \infty)$ -en a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{\theta^3 x^2}{2} e^{-\theta x}$ alakú, ahol $\theta > 0$ paraméter, ám az értékét nem ismerjük. Mintát vettünk X -ből, és azt kaptuk, hogy 1.7576; 3.6425; 2.8096; 4.4576; 3.7550. Adjunk maximum likelihood becslést θ -ra!