① a.) $X_1 \sim Bin(n=3, p=\frac{1}{2})$ (a fejdobások száma 3 kísérletből)
(4p)

$$\Rightarrow \boxed{g_{X_1}(z) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)^3}$$

b.) $X_2 = \sum_{k=1}^{X_1} \xi_k$ ~~ahol~~ véletlen tagszámú összeg ahol
(4p)

$\xi_k \sim B(\frac{1}{2})$ $\left(\xi_k = 1, \text{ha a k-adik dobás F} \atop 0, \text{ha} \qquad I\right)$

$\Rightarrow g_{\xi_k}(z) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)$ a közös generátorfüggvényük

$$\Rightarrow \boxed{g_{X_2}(z) = g_{X_1}(g_\xi(z))} = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\right)\right]^3 = \boxed{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}z\right)^3}$$

[Hát persze: úgy is lehetne mondani, hogy Pistike 3-szor próbálkozik azzal, hogy kétszer egymás után fejet dobjon, és X_2 a sikerek száma $\Rightarrow X_2 \sim Bin(n=3, p=\frac{1}{4})$.]

c.) X_n Galton-Watson elágazó folyamat $\xi \sim B(\frac{1}{2})$
(4p)

egylépéses utódszám-eloszlással. $m := \mathbb{E}\xi = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ a folyamat ~~szub~~ szubkritikus $\Rightarrow$ 1 valószínűséggel kihal.

[Igaz, hogy $X_0 = 3 \neq 1$, nem úgy, mint az előadáson, de persze a 0. generáció 3 tagjának családfája így is mind kihal $\Rightarrow$ az egész folyamat is kihal]

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{örökké dobál}) = 0}$$

(2) Az állapottér $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Az i állapotból nem lehet lépni i-be és $(7-i)$-be, a maradék 4 állapotba viszont $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$ eséllyel $\Rightarrow$ az átmenetmátrix

a.) (4p)

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

b.) (4p) 3 lépésben 1-ből 1-be úgy lehet visszajutni, hogy

- 1. lépésben mindegy, mit lépünk
- 2. lépésben ne lépjünk 1-be és 6-ba, a másik 2 lehetőség viszont jó
- 3. lépésben vissza 1-be

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbb{P}(X_3=1 \mid X_0=1) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}}$$

[Ami persze úgy is kijön, hogy $(P^3)_{11}=\frac{1}{8}$.]

c.) (4p) Az X_n Markov lánc irreducibilis (mert mindenhonnan mindenhova el lehet jutni) és aperiodikus (mert pl. 1-ből 1-be vissza lehet jutni 2 és 3 lépésben is). A P átmenetmátrix bisztochasztikus $\Rightarrow$ az egyenletes $\pi=\left(\frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\right)$ eloszlás stacionárius. [Ez a szimmetriából is látszik]

$$\xrightarrow[n=999 \text{ hosszú idő}]{\text{Markov láncok alaptétele}} \boxed{\mathbb{P}(X_{999}=1 \mid X_0=1) \approx \pi_1 = \frac{1}{6}}$$

③ A tartózkodási idő paraméter minden állapotban $\lambda=3$, vagyis egy ugrás után a következőig mindig $\sim Exp(\lambda=3)$ véletlen idő telik el, az előzményektől függetlenül. Vagyis az ugrási időpontok Poisson folyamatot alkotnak $\lambda=3$ intenzitással. Legyen $N(t)$ az ugrások száma t-ig ill. $N_{[t_1,t_2]}$ az ugrások száma t_1 és t_2 között.

a.) (4p) $N(t)\sim Poi(\lambda\cdot t) \Rightarrow N(5)=Poi(3\cdot5)=Poi(15)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N(5)=0)=e^{-15}\frac{15^0}{0!}=e^{-15}$$

[Avagy: legyen T az első ugrás ideje; $T\sim Exp(3)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(T>5)=e^{-3\cdot5}=e^{-15}$.]

b.) (4p) $\mathbb{P}(N(10)=4\mid N(5)=3)=\mathbb{P}(N_{[5,10]}=1\mid N(5)=3)\underset{\text{független}}{\overset{N(5)\text{ és }N_{[5,10]}}{=}}$

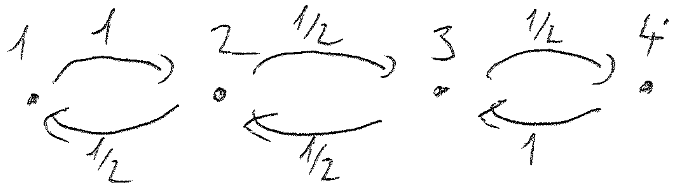
$$=\mathbb{P}(N_{[5,10]}=1)\overset{P_{[5,10]}\sim Poi(5\cdot3)}{=}e^{-15}\frac{15^1}{1!}=15e^{-15}$$

c.) (4p) A 10 időegység alatt történt 4 ugrás egymástól függetlenül $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ valószínűséggel esik $[0,5]$-be $\Rightarrow$ a $[0,5]$-be eső ugrások számának (feltételes) eloszlása $\sim Bin(n=4, p=\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(N(5)=3\mid N(10)=4)=\mathbb{P}(Bin(4,\tfrac{1}{2})=3)=\binom{4}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-3}}=\frac{\binom{4}{3}}{16}$$

$$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}=0.375$$

(4) Legyen $X_n \in \{1,2,3,4\}$ az, hogy Móricka hanyadik a sorban n csere után. X_n Markov lánc, gráf-reprezentációja



és $X_0 = 4$.

a.) A Markov lánc periodikus $d=2$ periódussal, 6
(4p) lépésben nem lehet 4-ből 1-be jutni

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_6 = 1) = \underline{\underline{0}}.$$

b.) X_n születési-halálozási folyamat, egyetlen stacionárius
(8p) eloszlása olyan, hogy

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 \cdot 1 &= \pi_2 \cdot \tfrac{1}{2} \\ \pi_2 \cdot \tfrac{1}{2} &= \pi_3 \cdot \tfrac{1}{2} \\ \pi_3 \cdot \tfrac{1}{2} &= \pi_4 \cdot 1 \end{aligned}\right\} \text{ vagyis } \begin{aligned} \pi_2 &= 2\pi_1 \\ \pi_3 &= \pi_2 = 2\pi_1 \\ \pi_4 &= \tfrac{1}{2}\pi_3 = \pi_1, \end{aligned}$$

vagyis $\pi = \text{const} \cdot (1 \quad 2 \quad 2 \quad 1) \xrightarrow{\text{normálás}} \left(\frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{1}{6}\right)$

X_n véges állapotterű és irreducibilis $\Rightarrow$ az ergodtétel szerint hosszú távon az idő $\underline{\underline{\pi_1 = \frac{1}{6} = 16.6\hat{6}\%}}$ hányadát tölti az 1-es állapotban.

(5) $f_\theta(x) = \frac{1}{2}\theta^3 x^2 e^{-\theta x} \Rightarrow \ln f_\theta(x) = \ln\frac{1}{2} + 3\ln\theta + 2\ln x - \theta x$

Így a log-likelihood függvény az $n=5$ elemű mintából

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\frac{1}{2} + 3\ln\theta + 2\ln x_i - \theta x_i\right] =$$

$$= n\ln\frac{1}{2} + 3n\ln\theta + 2\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(legalábbis ha $\forall x_i > 0$, de a mintánk szerencsére ilyen).

Ennek maximumhelyét keressük:

$$\ell'(\theta) = 3n\frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longleftrightarrow \frac{3}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

vagyis $\theta = \frac{3}{\overline{x}}$ az egyetlen lehetséges stac. hely $\Rightarrow$ kénytelen itt lenni a globális maximum.

$$\boxed{\theta_{ML} = \frac{3}{\overline{x}}}$$

esetünkben $\approx \underline{0.913}$

$\sum_i x_i = 16.4223$

$\overline{x} = 3.28446$