

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2024. január 16. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

- Villámkezü Mérő vitéz kalandozásai során egy egyfejű sárkánnyal találja magát szembe, és a fejét azonnal lenyisszantja. Igen ám, de a sárkánynak minden levágott feje helyett véletlen számú új feje nő ki, az előzményektől függetlenül, $\lambda = 0.8$ paraméterű Poisson eloszlás szerint. Villámkezü Mérő ezeket is szépen egyesével lenyisszantja.
 - Mennyi a valószínűsége, hogy a fejek előbb-utóbb elfognak?
 - Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy olyan nyisszantás lesz, ami után új fej(ek) nő(nek) ki?
 - Várhatóan hány fejet kell Mérő vitéznek levágnia?
- Villámkezü Mérő vitéz kalandozásai során egy 1000 fejű és egy 500 fejű sárkánnyal találja magát szembe (egyszerre), és azonnal elkezd a fejeket lekasabolni, szépen egyesével. Nem minden fejet sikerül azonban egyből levágni. Egy fejhez akár 5 kardcsapás is kellhet: a szükséges kardcsapások száma az egyes fejek esetében véletlen és független, várható értéke az 1000-fejű sárkány esetében 2, az 500-fejű esetében viszont 4 (mert annak vastagabbak a nyakai). Szerencsére, ha egy fejet egyszer sikerül levágni, az már nem nő vissza. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy 4400 kardcsapás után a fejek még mindig nem fogynak el.
- Pistikének vizsgán egy 4 lépésből álló számítást kellene elvégezni, de bizonytalan: minden lépés után csak $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugrik a következő lépésre, a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel viszont kezdi az egészet előlről. Kivétel az első lépés, ahonnan mindig a másodikra ugrik, és az utolsó, ahonnan mindig az elsőre. (Persze a munkát az első lépéssel kezdi.)
 - Mennyi a valószínűsége, hogy 4 ugrás után Pistike pont az első lépésen dolgozik?
 - Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 77 ugrás után Pistike pont az első lépésen dolgozik?
 - Bónusz:** És 770 ugrás után?
- Villámkezü Mérő vitéz kalandozásai során egy furcsa sárkánnyal találja szembe magát. Kezdetben csak 3 feje van, de újabb és újabb fejek nőnek ki egyesével, független és exponenciális eloszlású időközönként, percenként átlagosan 2 – még akkor is, ha Mérő már minden fejet levágott. A vitéz egyesével kaszabolni kezdi a fejeket: az egyes fejek levágásához neki is az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen időre van szüksége, átlagosan 20 másodpercre. Mivel mindig új fejek nőnek ki, a harc az idők végezetéig tart.
 - Várható értékben mennyi idő múlva változik először a fejek száma?
 - Mennyi a valószínűsége, hogy a harc kezdetén a sárkánynak hamarabb nő ki a negyedik feje, mint hogy a vitéz egyet is levágna?
 - Hány feje lesz a sárkánynak hosszú idő átlagában?
- Egy pékségben a félkilós buciba kerülő só mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó, általunk nem ismert várható értékkel és szórással. Mintát vettünk a buciból, megmértük a sótartalmakat, és a következő értékeket kaptuk (gramm-ban): 10.2; 9.9; 10; 10.5; 10.2; 10.3; 9.6; 10.1; 10; 10.3. Vizsgáljuk meg 95%-os konfidenciaszinten a pékségnek azt az állítását, mint null-hipotézist, hogy a várható érték legfeljebb 10 (gramm).

Segítség: Az adatsor elemeinek összege 101.1, négyzeteik összege 1022.69.