(1) A sárkányfejek Galton–Watson elágazó folyamatot alkotnak pontosabban:

- legyen a 0. generáció az eredeti egyetlen fej
- az $(n+1)$-edik generáció álljon az n. generáció tagjainak helyén (azok levágásakor) kinövő fejekből, $n = 0, 1, 2, \dots$

Legyen Z_n az n-edik generáció elemszáma.

Így Z_n Galton–Watson elágazó folyamat, $Z_0 = 1$, az egylépéses utódszám $X \sim Poi(\lambda)$ ahol $\lambda = 0.8$.

$m := \mathbb{E}X = \lambda = 0.8 < 1$, tehát a folyamat szubkritikus.

a.) $m < 1 \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1}$
(4 pont)

b.) X generátorfüggvénye $g(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{0.8(z-1)}$, ezért
(4 pont)

$$r_0 := \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$$

$$r_1 := \mathbb{P}(Z_1 = 0) = g(r_0) = g(0) = e^{-0.8} \approx 0.4493$$

$$r_2 := \mathbb{P}(Z_2 = 0) = g(r_1) = g(0.4493) = e^{0.8(0.4493-1)} \approx 0.6437$$

a kérdés pedig

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 1 fejnek nőnek utódai}) = \mathbb{P}(Z_1 \neq 0, \text{ de } Z_2 = 0) =$$

$$= r_2 - r_1 \approx 0.1944 \approx 19\%$$

c.) $\boxed{\mathbb{E}N \overset{m<1}{=} \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-0.8} = 5}$ ahol N a folyamat össz-populációja kihalásig.
(4 pont)

(2) Legyen $n=1500$ a ~~...~~ levágandó fejek száma, és $i=1,2,\dots,n$-re legyen X_i az i-edik ~~fej~~ levágásához szükséges kardcsapások száma. Ezek függetlenek, és $S_n := X_1+X_2+\dots+X_n$ az összes szükséges kardcsapás száma. A ~~...~~ feladat $\mathbb{P}(S_n > 4400)$ nagy eltérés becslése.

Az X_i-k korlátosak: $a_i := 1 \leq X_i \leq 5 =: b_i$

minden i-re, továbbá $\mathbb{E}X_i = 2$ 1000 db i-re és $\mathbb{E}X_i = 4$ 500 db i-re $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{E}S_n = 1000\cdot 2 + 500\cdot 4 = 4000,$$

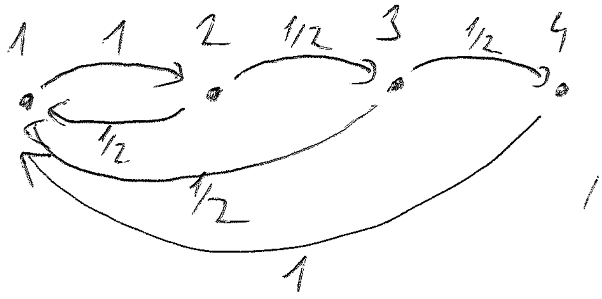
és $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2 = 1500\cdot(5-1)^2 = 1500\cdot 16 = 24000.$

Így a Hoeffding egyenlőtlenség szerint $t := 400$ választással

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n > 4400)} = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2\cdot 400^2}{24000}\right) = \boxed{e^{-13.33} \approx 1.62\cdot 10^{-6}}$$

③ Legyen $X_n \in \{1,2,3,4\} =: S$, hogy Pistike n ugrás után éppen hanyadik lépésen dolgozik. Ez az X_n időben homogén Markov lánc, gráf-reprezentációja



átmenetmátrixa
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a.) 4 ugrással 2-féleképpen juthat vissza: $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1$
(6 pont) vagy $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$,

így $\boxed{\mathbb{P}(X_4=1 \mid X_0=1)} \overset{X_0:=1}{=} \mathbb{P}(12121)+\mathbb{P}(12341) =$

$= \cancel{P_{12}+P_{21}+P_{12}} = P_{12}P_{21}P_{12}P_{21} + P_{12}P_{23}P_{34}P_{41} =$

$= 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$

b.) X_n irreducibilis, véges állapotterű és aperiodikus, mert
(6 pont) pl. 1-ből 1-be vissza lehet térni 2 és 3 lépésben is.
$n=77$ ugrás hosszú idő $\Rightarrow$ a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_{77}=1) \approx \pi_1$, ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás:

③ —folytatás—

Π kereséséhez megoldjuk a $(P^T - \mathbb{1})\Pi^T = 0$

lineáris egyenletrendszert (eliminációval):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1/2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

vagyis
$$\begin{cases} \Pi_3 = 2\Pi_4 \\ \Pi_2 = \Pi_3 + 2\Pi_4 \\ \Pi_1 = \frac{1}{2}\Pi_2 + \frac{1}{2}\Pi_3 + \Pi_4 \end{cases}$$

pl. $\Pi_4 = 1$ választással

$\Pi_3 = 2$

$\Pi_2 = 4$

$\Pi_1 = 4$

vagyis $\tilde{\Pi} = (4 \quad 4 \quad 2 \quad 1)$ egy megoldás,

ezt lenormálva $\boxed{\Pi = \left(\frac{4}{11} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{2}{11} \quad \frac{1}{11}\right)}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X_{47} = 1) \approx \Pi_1 = \frac{4}{11} \approx 0.3636 = 36.36\%}$$

[Megj: Ha az eliminációt ügyesebben csináljuk kevesebb munka.]

④ Legyen $X(t)$ a fejek száma t perc elteltével.

A feladat szerint ez folytonos idejű, időben homogén Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$ állapottéren:

- felfelé ugrunk $\lambda = 2$ rátával (ahogy a fejek nőnek)
- Lefelé ugrunk $\mu = 3$ rátával, mert

(kivétel persze a 0-ból) $\mathbb{E}$(Lefelé ugrásig eltelt idő) $= \cancel{20\text{ sec}}\ \frac{1}{3}$ perc

$= 20\text{ sec} = \frac{1}{3}$ perc

Vagyis a gráf-reprezentáció

$$0 \underset{3}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{3}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{3}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{3}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4 \underset{3}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \cdots$$

a.) Az $X(0) = 3$ állapotból való elugrás rátája összesen
(4 pont)

$$\lambda_3 = \lambda_{32} + \lambda_{34} = 3 + 2 = 5 \Rightarrow \cancel{\mathbb{E}(\text{tartózk.})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(\text{tartózkodási idő}) = \frac{1}{5}\text{ perc} = 12\text{ sec}}$$

b.) A beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenet-
(4 pont) valószínűségei $Q_{34} = \frac{\lambda_{34}}{\lambda_3} = \frac{2}{5}$, $Q_{32} = \frac{\lambda_{32}}{\lambda_3} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \boxed{Q_{34} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%}$ a vál.sége, hogy $X(0) = 3$-ból felfelé ugrunk.

④ – folytatás –

c.) $X(t)$ folytonos idejű irreducibilis születési-halálozási
(4pont) folyamat, egyetlen stacionárius eloszlása – ha van neki egyáltalán – olyan, hogy minden $i \in \{0,1,2,\ldots\}$-re

$\Pi_i \cdot 2 = \Pi_{i+1} \cdot 3$, vagyis $\boxed{\Pi_{i+1} = \frac{2}{3}\Pi_i}$, amiből $q := \frac{2}{3}$

jelöléssel $\Pi = \text{Const} \cdot (1, q, q^2, q^3, \ldots)$

Ez szummábilis (= lenormálható):

$$1+q+q^2+q^3+\ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

$\Rightarrow c := \frac{1}{3} =: p$ jelöléssel $\boxed{\Pi_i = p\,q^{i} \quad i=0,1,2,\ldots}$

vagyis a stacionárius eloszlás $\boxed{\Pi = \text{PessGeom}(p),\ p=\frac{1}{3}}$

létezik és egyértelmű.

Így az ergodtétel miatt az $f(X(t)) := X(t)$ fej-szám
$f(i) := i$
időátlaga hosszú távon

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))\,dt} = E_\Pi f = \Pi \cdot f = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i f(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,\Pi_i =$$

$$\underbrace{\text{pont a } \Pi \text{ eloszlás}}_{\text{várható értéke}} \quad E\,\text{PessGeom}(p) = \frac{1}{p} - 1 = 3-1 = \boxed{2}$$

(5) Egymintás 1-oldali t-próbát végzünk, mert a szórás ismeretlen és a null-hipotézis $H0: m \leq \mu$ ahol m a tényleges várható érték és $\mu = 10$ a hipotetikus.

$\overline{x} = \frac{101.1}{10} = 10.11 > \mu$, így a minta alapján a null-hipotézis gyanús, és sajnos számolni kell:

a tapasztalati szórásnégyzet

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 \overset{n=10}{=\!=} \frac{1022.69}{10} - (10.11)^2 \approx 0.0569$$

a korrigált tapasztalati szórásnégyzet

$$S_n^{*2} = \frac{n}{n-1} S_n^2 \approx \frac{10}{9} \cdot 0.0569 \approx 0.06322\ldots$$

amiből $\boxed{S_n^* \approx 0.25144}$

így a teszt-statisztika ~~t_a~~

$$\boxed{t = \frac{\overline{x} - \mu}{S_n^*}\sqrt{n} = \frac{10.11 - 10}{0.25144}\sqrt{10} \approx 1{,}3834}$$

Az ~~küszöb~~ elfogadási küszöb pedig a $df = n - 1 = 9$ szabadsági fokú t eloszlás $1 - \varepsilon$ kvantilise ahol $\varepsilon = 0.05$ [$1 - \varepsilon = 95\%$ a konfidenciaszint], a táblázat szerint $\boxed{K = 1.833}$

$\boxed{\text{DÖNTÉS: } t < K \Rightarrow \text{a null-hipotézist ELFOGADJUK.}}$