Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2024. január 23. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

1. Egy boltban az almák 6-osával vannak csomagolva. Minden alma a többitől függetlenül 5% valószínűséggel kukacos.

   a.) Pistike vesz egy csomag almát. Legyen X a kukacos almák száma ebben a csomagban. Mi X generátorfüggvénye?

   b.) Jancsika vesz 10 csomag almát. Legyen Y a kukacos almák száma ezekben összesen. Mi Y generátorfüggvénye?

   c.) Juliska minden nap elmegy a boltba. Ott $\frac{2}{3}$ valószínűséggel szétnézés nélkül vesz egy csomag almát, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont szétnéz, meglátja, hogy van narancs is, és akkor soha többé nem vesz almát (már aznap sem). Legyen Z a Juliska által megvett kukacos almák száma. Mennyi Z várható értéke?

2. Móricka a számítógépnél ül és fázik. Néha – mégpedig egymástól független, exponenciális eloszlású véletlen időközönként, átlagosan félóránként – eszébe jut, hogy feljebb kéne venni a fűtést. Ám mivel Móricka lusta, ilyenkor először eldob egy szabályos dobókockát, és csak ha az eredmény 6-os, akkor veszi feljebb a fűtést, amúgy inkább nem.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével még mindig nem vette feljebb a fűtést?

   b.) Feltéve, hogy 2 óráig nem vette feljebb a fűtést, mennyi a valószínűsége, hogy aztán egy óra alatt kétszer is? (értsd: legalább kétszer)

   c.) Feltéve, hogy 2 óráig nem vette feljebb a fűtést, mennyi a valószínűsége, hogy eszébe se jutott?

3. Józsi egy 5 feladatból álló írásbeli vizsgát ír és kapkod. Minden feladattal pontosan 3 percet foglalkozik, aztán $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a következő feladatra ugrik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig az előzőre, az előzményektől függetlenül. Kivétel az utolsó feladat, ahonnan $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az előzőre ugrik, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel viszont az *elsőre* – illetve az első feladat, ahonnan $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a másodikra ugrik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont az *utolsóra*. Józsi a munkát az első feladattal kezdi.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 13 perc elteltével megint éppen az első feladatnál jár?

   b.) Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 91 perc elteltével megint éppen az első feladatnál jár?

   c.) **Bónusz:** És ha 6 feladat lenne?

4. Az X valószínűségi változó lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots$, ezek valószínűségei $\mathbb{P}_\theta(X = k) = (k+1)(1-\theta)^k\theta^2$, ahol $\theta > 0$ ismeretlen paraméter. Mintát vettünk X-ből és azt kaptuk, hogy 6; 2; 3; 3; 4; 3; 2; 4; 8; 3. Adjunk maximum likelihood becslést θ-ra!

5. Egy pékségben a félkilós buciba kerülő só mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó, általunk nem ismert várható értékkel, ám ismert 0.25 gramm szórással. Mintát vettünk a buciból, megmértük a sótartalmakat, és a következő értékeket kaptuk (gramm-ban): 10.2; 9.9; 10; 10.5; 10.2; 10.3; 9.6; 10.1; 10; 10.3. Vizsgáljuk meg 95%-os konfidenciaszinten a pékségnek azt az állítását, mint null-hipotézist, hogy a várható érték pontosan 10 (gramm).

   Segítség: Az adatsor elemeinek összege 101.1, *négyzeteik összege* 1022.69.