

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

második ZH, 2021 ősz – 2021.12.01, 18:00

Munkaidő: 90 perc

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

- Legyen Z_n Galton-Watson elágazó folyamat melyben az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = \left(\frac{1}{2-z}\right)^2$.
 - Mennyi az átlagos utódszám?
 - Mennyi a $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$ valószínűség?
 - Mennyi a valószínűsége annak, hogy az elágazó folyamat kihal?
- A Piripócsi Alma Zrt. részvényeinek árfolyama a kereskedés i -edik napjának elején P_i (petákban). Jelölje X_i a részvény (logaritmikus) hozamát az i . napon, vagyis $X_i = \log \frac{P_{i+1}}{P_i}$. (Így $100X_i$ körülbelül azt mondja meg, hány százalékkal nőtt aznap a részvényár.) Tegyük fel, hogy a napi hozamok függetlenek és azonos eloszlásúak! (A gyakorlatban ez viszonylag jól működik, viszont válságok idején pocsék feltevés.) Az elmúlt 5 év adataiból tudjuk, hogy X_i várható értéke $1,4 \cdot 10^{-3}$, szórása $1,9 \cdot 10^{-2}$, illetve centrált abszolút harmadik momentuma $1,8 \cdot 10^{-5}$. Jelölje $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az n nap alatti össz-hozamot! (Ezzel a jelöléssel a részvény értéke e^{S_n} -szeresére nő.)
 - Közelítsük a centrális határeloszlás tétel segítségével annak a valószínűségét, hogy a részvény hozama két év alatt negatív lesz.
 - Legfeljebb mennyi lehet a fenti közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételbeli konstans választható 0.4748-nak.)
- A Piripócs Care Zrt. kétféle utasbiztosítást kínál az odalátogatók számára: a normál csomag 5000, míg a prémium csomag 20000 peták erejéig fedezi a biztosítottak kárát. (A biztosítási időszak mindig 1 hónap.) Korábbi megfigyelések alapján tudják, hogy egy normál szerződés alapján átlagosan 50, egy prémium szerződés alapján pedig átlagosan 100 peták kárt kell megtéríteniük. Januárra normál szerződést 75000-en kötöttek, míg prémium szerződést 25000-en. Mennyi pénzt tartalékoljon a Piripócs Care Zrt. januárra, hogy a kárigényeket legalább 99.9% valószínűséggel ki tudja fizetni? (Pontosabban: adjunk meg egy K értéket, ami legalább 99.9% valószínűséggel elég, és kisebb, mint a $75000 * 5000 + 25000 * 20000 = 8.75 \cdot 10^8$ petákos abszolút korlát.)
- Pest Megyében az első negyedévben átlagosan 700 közúti baleset szokott történni, ennek 80%-a autóbaleset és 5%-a motorbaleset. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden baleset egyértelműen besorolható az „autóbaleset”, „motorbaleset” és „egyéb” kategóriák valamelyikébe.)
 - Mennyi a valószínűsége annak, hogy jövőre január 13-án egyetlen közúti baleset sem fog történni?
 - Mennyi az esélye, hogy jövőre február 13-án legalább 1 motorbaleset és legalább 3 autóbaleset történik?
- Egy gyakorlatvezető, ha egészséges, $1.16 \cdot 10^{-10}$ valószínűséggel betegszik meg a következő ezredmásodpercben, amikor pedig beteg, $1.16 \cdot 10^{-9}$ valószínűséggel gyógyul ki egy ezredmásodperc alatt – az előzményektől függetlenül.

Feltéve, hogy a félév első hetén hétfőn 0 órakor egészséges volt, körülbelül mennyi az esélye annak, hogy a 10. hét péntekén éjfélkor is egészséges lesz?