**Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika**
minta ZH, 2024 ősz

Az egyetlen ZH 5 feladatból fog állni, a munkaidő 90 perc.

Minden feladat SZÁMOLÁSI feladat lesz: hasonló a gyakorló feladatsor feladataihoz AZ ELSŐ 6 TÉMAKÖRBŐL, valamint a 7. TÉMAKÖRBŐL a véges időfejlődére vonatkozó kérdések (vagyis a hosszú távú viselkedésre vonatkozó kérdések NEM).

Természetesen a feladatok NEM fognak megegyezni a gyakorló feladatokkal.

Mivel 5-nél jóval több feladattípus van, sorsolással dől el, hogy melyik típusok szerepelnek.

Egy lehetséges példa:

1. Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyiszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje $Y$ az érmével dobott fejek számát.

   a.) Számoljuk ki $Y$ generátorfüggvényét. *(Tipp: $Y$ egy véletlen tagszámú összeg.)*

   b.) Mennyi $Y$ várható értéke?

2. Móricka az egyetemi órák látogatásának egészségügyi kockázatairól ír egy kamu lánclevelet, és elküldi 10 ismerősének a nulladik napon. A levélben benne van, hogy a címzett küldje tovább újabb 10 embernek. A levelet a címzettek egymástól függetlenül 90% valószínűséggel olvasatlanul törlik, ám a maradék 10% valószínűséggel tényleg továbbküldik 10 embernek, a következő napon.

   a.) Várhatóan hányan küldenek levelet a harmadik napon?

   b.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb senki nem küldi tovább a levelet?

   c.) Mennyi a levelet továbbküldő emberek számának várható értéke?

3. Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

   b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

   c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

4. Egy kis telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint $2,5$ órát kell várni.

   *(Segítség: a $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye*

   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.$$

   *A $\lambda$ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye*

   $$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).)}$$

5. Az $X_n$ diszkrét idejű Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, átmenetmátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

a.) Ha a kezdeti állapot 1, mennyi az „123233" állapot-sorozat (trajektória) bejárásának valószínűsége (vagyis $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 3)$)?

b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 6 \mid X_0 = 1)$ feltételes valószínűség?