

## Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

pótpótZH, 2021 ősz – 2021.12.13 18:00

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

- A Yahtzee nevű játékot 5 kockával játsszák. Egy dobást akkor hívnak Yahtzee-nak, ha mind az öt kocka azonos oldalára esik. (Nem számít, milyen számra esnek, csak az, hogy egyformára.)
  - Mennyi az esélye annak, hogy egy dobás Yahtzee? (3 pont)
  - Mekkora az esélye, hogy 1000 dobásból legalább egy Yahtzee? (Amennyiben az előző kérdést nem tudta megválaszolni, tegye fel, hogy egy Yahtzee dobás esélye 0.1%! (4 pont)
  - Pistike egy dobás során 5 darab 2-est dobott, viszont két kocka leesett az asztalról, így a játék-mester ítélete alapján azzal a két kockával újra kell dobnia. Mi az esélye, hogy azokat újra dobva végül Yahtzeeja lesz Pistikének az 5 kockából? (4 pont)
- Svindlis Sanya egy Multi Level Marketing (MLM) hálózatot szeretne kiépíteni Piripócs városában. A piackutatók felmérése alapján a hálózat minden tagja 30 főt próbál meg beszervezni és minden emberrel 5% eséllyel jár sikerrel, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a hálózatot Sanya alkotja egymaga. Akiket beszervez, azok lesznek az ő „közvetlen utódai”.
  - Jelölje  $X$  azt a véletlen változót, ami megmondja, hány embert sikerül Sanyának (személyesen) beszerveznie. Mi  $X$  generátorfüggvénye? (5 pont)
  - Közelítőleg mennyi az esélye, hogy Svindlis Sanya hálózata végtelen nagyra nő – vagyis a hálózat terjedését leíró elágazó folyamat *nem* hal ki? (Amennyiben az előző kérdést nem tudta megválaszolni, dolgozzon tovább  $g(z) = e^{2(z-1)}$  generátorfüggvénnyel!) (5 pont)
- Piripócs főútján percenként átlagosan 20 autó halad el. Pistike át szeretne menni az úton, és ehhez 5 másodpercre van szüksége.
  - Mi az esélye annak, hogy Pistike, amint az úthoz ért, várakozás nélkül át tud rajta haladni – vagyis, hogy rögtön az első 5 másodpercben nem érkezik autó? (5 pont)
  - Mennyi a 3. és a 8. autó elhaladása közötti idő várható értéke? (5 pont)
- A piripócsi kisbolt kasszájában záráskor csak az aprót hagyják benne: a húszezer-petákosokat beviszik a bankba. Ily módon a pénztáros minden nap  $\frac{3}{4}$  valószínűséggel 20000 petákosot visz be a bankba,  $\frac{1}{8}$  valószínűséggel 40000-et,  $\frac{1}{8}$  valószínűséggel pedig semmit, az előzményektől függetlenül.
  - Januárban a kisbolt 25 napon lesz nyitva. Közelítsük a centrális határeloszlás tétel segítségével annak a valószínűségét, hogy ez alatt a pénztáros legalább 450000 petákosot visz be a bankba! (5 pont)
  - Legfeljebb mennyi lehet a fenti közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételben szereplő konstans választható  $C = 0.4748$ -nak.) (5 pont)
- Egy romantikus téli estén Jancsi megfogja Juliska jeges kezét, hogy megmelengesse. Modellezzük Juliska kezének felmelegedését az alábbi kép alapján: Kettejük kezében „energia-csomagok” vannak, szám szerint egymillió: kezdetben 60%-uk Jancsi, 40%-uk pedig Juliska kezében. Minden csomag  $3 \frac{\text{ugrás}}{\text{perc}}$  rátával kerül át az egyik kézről a másikba (egymástól és az előzményektől függetlenül).
  - Jelölje  $\pi_u(t)$  annak az esélyét, hogy egy konkrét energia-csomag  $t$  idő elteltével Juliska kezében található, valamint  $\pi_a(t)$  annak az esélyét, hogy Jancsiéban. (Persze  $\pi_u(t) + \pi_a(t) = 1$ .) Milyen differenciálegyenlettel tudjuk leírni  $\pi_u(t)$  időfejlődését? (5 pont)
  - Az energia-csomagoknak kb. mekkora hányada lesz Juliska kezében 10 perc elteltével? (5 pont)

(Megjegyzés: a modell sántít – a valóságban az egyes energia-kvantumok megkülönböztethetetlenek.)