Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
házi feladatok, 2018 ősz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2018.09.26.)

HF 1.1 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágnak. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?

b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

HF 1.2 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

2.HF: (Beadási határidő: 2018.10.10.)

HF 2.1 a.) Legyen az X valószínűségi változó Poison eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel, és legyen $Y = 2 + 3X$. Mi Y generátorfüggvénye?

b.) Egy Z valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{\ln\left(1-\frac{z}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$. Adjuk meg Z eloszlását, vagyis a $\mathbb{P}(Z = k)$ valószínűségeket, ahol $k = 0, 1, 2 \ldots$.

HF 2.2 Egy kis boltba a vevők szabályos időközönként érkeznek, percenként pontosan egy, és beállnak a sorba. Egy vevő kiszolgálása véletlen ideig tart, ami minden vevő esetén független és azonos eloszlású. Konkrétan a kiszolgálási idő 0, 1 vagy 2 perc lehet, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ illetve $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. (Ez úgy lehet, hogy a vevők fele, miután sorra kerül, csak körbenéz, látja, hogy nincs az, amit keres, és rögtön kimegy.)

Reggel 08:00-kor bejön a legelső vevő: nevezzük őt egymagát a *nulladik generáció*nak. A legelső vevő kiszolgálása idején érkező újabb vevőket (akikből lehet 0, 1 vagy 2) nevezzük az *első generáció*nak. És így tovább: azokat, akik az n-edik generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkeznek, nevezzük az $(n+1)$-edik generációnak $n = 0, 1, 2, \ldots$-re. Jelölje Z_n az n-edik generáció tagjainak számát.

a.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

b.) Mi Z_3 generátorfüggvénye?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_4 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a boltos bácsi egyszer szünetet tarthat, vagyis hogy a boltban egyszer csak (egy percig) nem lesz egyetlen vevő sem?

e.) Mennyi az első szünetig eltelt percek számának várható értéke?

f.) Mennyi az első szünetig eltelt percek számának generátorfüggvénye?

3.HF: (Beadási határidő: 2018.10.24.)

HF 3.1 a.) Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel. Számoljuk ki az $m = \mathbb{E}X$, $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}((X-m)^2)$ és $\delta := \mathbb{E}(|X-m|^3)$ mennyiségeket! *(Megjegyzés: a várható értéket és a szórásnégyzetet persze szabad tudni fejből vagy táblázatból. A δ kiszámolásánál viszont észnél kell lenni: mivel $X - m$* ***abszolút értéke*** *szerepel a definícióban, ez nem potyog ki pl. a generátorfüggvény-módszerből, hanem integrálni kell, az integrálban pedig figyelni kell az esetszétválasztásra.)*

b.) Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 1 bomlás történik. Közelítsük a centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével annak a valószínűségét, hogy az 1000-edik bomlásra legfeljebb 15 perc 5 másodpercet kell várni!

c.) Legfeljebb mekkora lehet az előző CHT közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint?

HF 3.2 Egy képzeletbeli városban a közvilágítás kiégett izzóit azonnal kicserélik. Az egyes izzók élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A most következő hónapban a közvilágítás izzóinak összesen 905 évnyi üzemidőt kell teljesíteni (sok lámpa van). Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a raktáron lévő 1000 csereizzó egy hónapra nem lesz elég.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\textit{ha } x > 0).$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x\ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\textit{ha } x > 0).)$$

4.HF: (Beadási határidő: 2018.11.29.)

HF 4.1 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka időegységenként ugrik egyet (pontosan 10 másodpercenként). Az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ugrik egyet felfelé (kivéve, ha legalul van, mert akkor biztosan felfelé ugrik), $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig egyet lefelé (kivéve, ha legfelül van, mert akkor biztosan lefelé ugrik). Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen X_n a béka helye n ugrás után.

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc állapotterét, átmenetmátrixát és kezdeti eloszlás vektorát!

b.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a béka rögtön az elején a 101232 pályát járja be? (Úgy értve, hogy kezdetben az 1 szinten van, az első ugrás után a 0 szinten, aztán megint a 1 szinten, stb.)

d.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! (Pontosabban: az átmenetmátrixának stacionárius eloszlásait.) Szabad kihasználni, hogy X_n születési-halálozási folyamat.

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 120 ugrás után a béka legfelül lesz? Miért?

f.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

HF 4.2 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben.*

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! *(Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várni!)*

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

Bónusz: Mi köze egymáshoz az előző két feladat-beli két Markov lánc stacionárius eloszlásának?

5.HF: (Beadási határidő: 2018.12.06.)

HF 5.1 Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig ismeretlen. Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.

HF 5.2 A „Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika” tárgyból az egyes hallgatók által szerzett gyakjegy egy valószínűségi változó, lehetséges értékei 1, 2, 3, 4, 5. A hallgatókat két kategóriába soroljuk: az I-es kategóriába azok tartoznak, akik a házi feladatok kevesebb, mint felét oldják meg (vagyis kevesebb, mint 5 pontot szereznek házi feladatból), a II-es kategóriába pedig a többiek.

A 2017 őszi félévi kurzus kivonatos eredményei megtalálhatók a 2018 őszi félév weblapján:

`math.bme.hu/~mogy/oktatas/VillamosMSc_Sztoch/VillamosMSc_Sztoch_2018osz.html`

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az I es és II-es kategória hallgatóinak gyakjegye azonos eloszlású.