Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
1. ZH minta

2016 ősz

Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 9 pontot ér.

1. Egy országban minden tízezredik ember HIV fertőzött. A fertőzöttség vizsgálatára hivatott AIDS teszt megbízhatósága 99%, abban az értelemben, hogy a fertőzötteken elvégzett tesztek 1%-a ad (hibásan) negatív eredményt, illetve az egészségeseken elvégzett tesztek 1%-a ad (hibásan) pozitív eredményt.

   Mórickát véletlenszerűen kisorsolták a teljes népességből. Elvégezték rajta a tesztet, és pozitív lett. Mi a valószínűsége, hogy Móricka valóban fertőzött?

2. Egy pékségben az edénybe, amiben 5000 mazsolás keksz masszáját keverik, 20000 mazsolát öntenek.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott kekszben legalább 3 mazsola lesz?

   (b) Három kekszet kiválasztottunk, ebből az első kettőben pont 3-3 mazsola volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadikban is pont 3 lesz?

3. Egy telefonos ügyfélszolgálatra a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 6. A két ügyintéző (Móricka és Pistike) minden hívásnál érmedobással dönti el, hogy melyikük vegye fel. Legyen X a Pistike által 8 óra alatt felvett hívások száma. Határozzuk meg X generátorfüggvényét.

4. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét. Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.

5. Egy fagyisnál minden gyerek kiszolgálása pontosan 1 percig tart. Ezalatt új gyerekek állhatnak be a sorba. Minden gyerek kiszolgálása alatt az újonnan beállók száma pesszimista geometriai eloszlású $p = 0,75$ paraméterrel (vagyis $X \sim Geom(p)$, ha $\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p$, $k = 0, 1, \dots$) és független az előzményektől.

   Definíció: A fagyis bácsi foglaltsági periódusa az első gyerek érkezési pillanatában kezdődik és akkor ér véget, amikor először nincs kiszolgálnivaló gyerek.

   (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a foglaltsági periódus véges hosszú.

   (b) Nevezzük *első generáció*nak az első gyerek kiszolgálása alatt érkező gyerekeket, (lehet, hogy egy sincs ilyen), második generációnak pedig az első generáció kiszolgálása alatt érkezőket. Mi annak a valószínűsége, hogy a „második generáció” átvizsgálása alatt nem érkezik több gyerek (vagyis hogy a harmadik generáció már üres)?

   (c) Legyen N az összes kiszolgált gyerek száma, beleértve a kezdőt is, egy foglaltsági periódus alatt. Határozzuk meg N generátorfüggvényét és várható értékét.