Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika 2. ZH

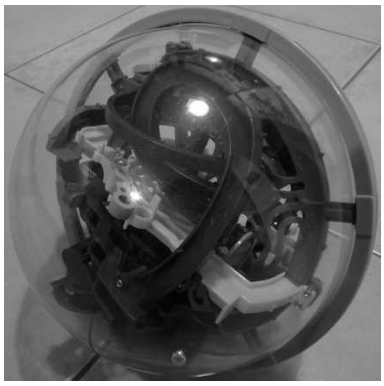
2017 ősz, 2017.12.07 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és, ha ez nem egyértelmű, a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások: **a.)** Horváth Illés (páratlan heteken, IB145) **b.)** Kói Tamás (páratlan heteken, QBF10) **c.)** Patkó Richárd páratlan heteken (IB147) **d.)** Patkó Richárd páros heteken (IB147).

1. Jancsika tapasztalatai szerint egy kilenc pontos ZH-feladatra a hallgatói átlagosan 5 pontot szoktak szerezni, az egyes hallgatók által elért pontszámok pedig függetlenek. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a következő ilyen feladatra a 100 hallgatója összesen több, mint 680 pontot szerez.

2. Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről.
Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



Magical Intellect Ball

   a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát. *(2 pont)*

   b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal? *(5 pont)*

   c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon? *(2 pont)*

3. Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár”, illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel”.

   Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk. *(3 pont)*

   b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért? *(4 pont)*

   c.) Az eszköz teljesítmény-felvétele passzív állapotban $1W$, feldolgozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítmény-felvétel hosszú távon? Miért? *(2 pont)*

4. Egy (esetleg) hamis dobókockán a 6-os valószínűsége valami ismeretlen $p \in (0; 1)$, az összes többi szám valószínűsége pedig azonos, $\frac{1-p}{5}$. A kockával 10-szer dobva mintát vettünk az eloszlásból, és azt kaptuk, hogy $5; 6; 4; 3; 4; 6; 3; 1; 6; 3$. Adjunk maximum likelihood becslést p értékére.

5. Ha egy ember kitölt egy IQ-tesztet, az eredmény normális eloszlású valószínűségi változó. Ennek várható értékét definíció szerint az illető ember *intelligencia-hányadosának* nevezzük, szórása pedig 3. Pistike kitöltött néhány független IQ-tesztet. Pontszámai: 97, 101, 96, 98. Döntsünk 90%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Pistike intelligencia-hányadosa 100.