Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
2. ZH minta

2015 ősz

A ZH-n 3 feladat lesz, ezek mindegyike 15 pontot fog érni. Ebbe nem fér bele minden feladattípusból $1-1$, ezért a 3 feladat véletlenszerűen lesz kiválasztva az alábbi típuspéldákhoz nagyon hasonló feladatok közül, valamint esetleg a házi feladatokhoz nagyon hasonló feladatok közül. (A két csoport között jelentős az átfedés, de nincs tartalmazás.) Ezen kívül szerepelhet az *első mintaZH* anyaga is, kis súllyal.

1. Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

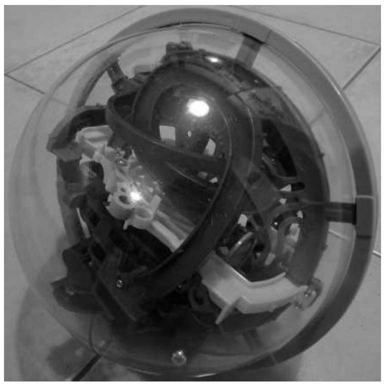
   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramer féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.)$$

2. Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről.
   Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.

   Magical Intellect Ball

   a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.

   b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

   c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

3. Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

   a.) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát. Indokoljuk.

   b.) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

   c.) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja? Miért?

   d.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve? Miért?

4. Egy hegy tengerszint feletti magasságára vagyunk kíváncsiak, de csak hibával terhelten tudjuk megmérni: a mérési eredmény normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke az (általunk nem ismert) tényleges magasság, szórása pedig 20 méter. Végrehajtottunk 10 egymástól független mérést, és a következő számokat kaptuk (méterben): 7009, 7023, 6999, 6994, 6978, 7014, 6989, 6997, 7009, 6993.

   Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a hegy pontosan 7000 méter magas.

   (Segítség: a fenti 10 *szám összege* 70005*, négyzetösszege* 490071587*.)*

5. Egy hegy tengerszint feletti magasságára vagyunk kíváncsiak, de csak hibával terhelten tudjuk megmérni: a mérési eredmény normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke az (általunk nem ismert) tényleges magasság, szórása pedig ismeretlen. Végrehajtottunk 10 egymástól független mérést, és a következő számokat kaptuk (méterben): 7009, 7023, 6999, 6994, 6978, 7014, 6989, 6997, 7009, 6993.

   Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a hegy legfeljebb 7000 méter magas.

   (Segítség: a fenti 10 *szám összege* 70005*, négyzetösszege* 490071587*.)*