Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
egyetlen ZH, 2024 ősz

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 9 pontot ér.

1. a.) Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g_X(z) = \left(\frac{2z+c}{5}\right)^9$. Mennyi a c konstans?

   b.) Az Y valószínűségi változó generátorfüggvénye $g_Y(z) = 3^{z-1}$. Mennyi Y várható értéke? Mennyi a szórása?

   c.) Az Z valószínűségi változó generátorfüggvénye $g_Z(z) = z^5\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z\right)^{10}$. Mennyi a $\mathbb{P}(Z = 7)$ valószínűség?

2. Ádámka az apukáját kérdezgeti: épp most tette fel a legelső kérdést, amit az apukája készségesen elkezdett megválaszolni. Igen ám, de amíg az apuka egy kérdést megválaszol, Ádámkának véletlen számú újabb kérdés jut eszébe, éspedig az előzményektől függetlenül $\frac{2}{10}$ valószínűséggel 1, $\frac{3}{10}$ valószínűséggel 2 és $\frac{4}{10}$ valószínűséggel 3 kérdés (a maradék $\frac{1}{10}$ valószínűséggel 1 sem). Ezeket a kérdéseket gyorsan fel is teszi, így az apuka ezekre is kénytelen válaszolni.

   Mennyi a valószínűsége, hogy az apuka valaha is a kérdések végére ér?

3. Egy oktató mind a 120 hallgatójának vaktában ad vizsgajegyet 1 és 5 között. (Vaktában: függetlenül és egyenletes eloszlással.) Meg akarjuk becsülni annak valószínűségét, hogy a kurzuson az átlag 2-nél kevesebb lesz. Ha a valószínűséget a centrális határeloszlás tétel alapján közelítjük, legfeljebb mennyi lehet a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint?

4. Egy vizsgán 100 hallgató vesz részt, közülük 60 készült, 40 pedig nem. Aki nem készült, az $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kap 1-est vagy 2-est, aki pedig igen, az $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ valószínűséggel kap 3-ast, 4-est vagy 5-öst, a többiektől függetlenül. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a jegyek átlaga 3.5-nél nagyobb lesz.

5. Juli néni gyakran főz valami tejfölöset. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elhasznál egy pohár tejfölt a hűtőből. (A maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem használ tejfölt.) Az, hogy a hűtőben egy tejfölt sem talál, nem fordulhat elő, mert ha elhasználja az utolsót, akkor még aznap elmegy a boltba és vesz 5 pohárral.

   Jelöljük X_n-nel a hűtőben lévő pohár tejfölök számát az n-edik nap végén. Az X_n Markov láncnak

   a.) adjuk meg az állapotterét *(emlékeztető: este a hűtő sose üres)*,

   b.) rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját,

   c.) írjuk fel az átmenetmátrixát.

   d.) Hétfő este 2 pohár tejföl volt a hűtőben. Mennyi a valószínűsége, hogy csütörtök este 5 lesz?