1

a.) $g_X(1)=\left(\frac{2+c}{5}\right)^9=1 \Rightarrow \boxed{c=3}$

b.) 1. megoldás: $g_Y(z)=3^{z-1}=e^{\lambda(z-1)}$, ahol $\lambda=\ln 3 \approx 1.0986$

$\xrightarrow[\text{gyűjteménykből}]{\text{képlet-}} Y\sim Poi(\lambda) \Rightarrow \boxed{EY=\lambda=\ln 3}$

$Var\,Y=\lambda=\ln 3 \Rightarrow \boxed{DY=\sqrt{\lambda}=\sqrt{\ln 3}} \approx 1.048$

2. megoldás: $g_Y(z)=3^{z-1}$

$g_Y'(z)=3^{z-1}\ln 3 \Rightarrow g_Y'(1)=\ln 3 \Rightarrow \boxed{EY=g_Y'(1)=\ln 3} \approx 1.0986$

$g_Y''(1)=3^{z-1}(\ln 3)^2 \Rightarrow g_Y''(1)=(\ln 3)^2$

$Var\,Y=g_Y''(1)+g_Y'(1)-[g_Y'(1)]^2=\ln 3+(\ln 3)^2-(\ln 3)^2=\ln 3$, $\boxed{DY=\sqrt{\ln 3}}$ ≈ 1.048

c.) 1. megoldás: $g_Z(z)=\sum_{k=0}^{\infty} P(Z=k)z^k$, vagyis $P(Z=7)$ a 7-edfokú

tag együtthatója: $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z\right)^{10}=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+10\left(\frac{2}{3}\right)^9\frac{1}{3}z+\underbrace{\binom{10}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}z\right)^2}+\ldots$

binomiális tétel

vagyis itt a z^2 együtthatója $\binom{10}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2$

de $g_Z(z)=z^5\cdot$ ugyanaz $\Rightarrow \boxed{P(Z=7)=\binom{10}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{\cancel{10}^{5}\cdot \cancel{9}\cdot 2^8}{\cancel{2}\cdot 3^{\cancel{10}\,8}}=5\left(\frac{2}{3}\right)^8}$ ≈ 0.1951

2. megoldás: $g_Z(z)=z^5\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z\right)^{10} \Rightarrow Z=5+V$, ahol $g_V(z)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z\right)^{10}$,

vagyis $V\sim Bin(n=10, p=\frac{1}{3})$. Ebből $\boxed{P(Z=7)=P(V=2)=\binom{10}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$\approx 0.1951 \approx 20\%$

(2) Legyenek egy kérdés utódai azok a kérdések, amik az ő megválaszolásának ideje alatt születnek. Nevezzük nulladik generációnak a legeslegelső kérdést egymagát, és $n=0,1,2,\dots$-re az $(n+1)$-edik generáció álljon az n-edik generáció tagjainak utódaiból. Legyen Z_n az n-edik generáció tagjainak száma.

Így a szöveg szerint Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, $Z_0=1$ és az X 1-lépéses utódszám eloszlása

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$4/10$

Az apuka pontosan akkor ér a kérdések végére, ha a folyamat kihal.

$m=\mathbb{E}X=\frac{1}{10}\cdot 0+\frac{2}{10}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2+\frac{4}{10}\cdot 3=\frac{2+6+12}{10}=2>1$, vagyis a folyamat szuperkritikus, $\mathbb{P}(\text{kihalás})<1$, és sajnos számolni kell: $r_\infty:=\mathbb{P}(\text{kihalás})$ a $z=g(z)$ fixpont-egyenlet egyetlen $[0,1)$-beli megoldása. Ehhez $g(z)=\frac{1}{10}\cdot z^0+\frac{2}{10}z^1+\frac{3}{10}z^2+\frac{4}{10}z^3=\frac{1+2z+3z^2+4z^3}{10}$ az X generátorfv-e, a fixpont-egyenlet

$$z=\frac{1+2z+3z^2+4z^3}{10}$$

harmadfokú, de tudjuk, hogy $z=1$ megoldás

$$0=4z^3+3z^2-8z+1=(z-1)(4z^2+7z-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{z=1} \vee 4z^2+7z-1=0 \Rightarrow z=\frac{-7\pm\sqrt{49+4\cdot 4}}{2\cdot 4}=\frac{-7-\sqrt{65}}{8},\ \boxed{\frac{-7+\sqrt{65}}{8}}$$

ez az egyetlen $[0,1)$-beli gyök

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{végére ér})=\\&=\mathbb{P}(\text{kihalás})=\\&=\frac{-7+\sqrt{65}}{8}\approx 0{,}1328\\&\approx 13\%\end{aligned}}$$

(3) Legyen $n = ~~100~~ 120$, és $i = 1, 2, 3, \dots, n$-re legyen X_i az i-edik hallgató jegye. Így $X_i \sim \mathrm{Uni}(\{1,2,3,4,5\})$.

Legyen $S_n = X_1 + \dots + X_n$, és a $\mathbb{P}(S_n < 240)$ valószínűség CHT-~~becslésének~~ közelítésének hibáját keressük. Ehhez $m := \mathbb{E}X_1 = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$.

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X_i = \mathbb{E}\left((X_i - 3)^2\right) = \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$\delta = \mathbb{E}\left(|X_i - 3|^3\right) = \frac{|-2|^3 + |-1|^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3}{5} = \frac{8+1+0+1+8}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

$\Rightarrow$ a CHT becslés hibája a Berry-Esseen tétel szerint legfeljebb

$$\frac{c\,\delta}{\sqrt{n}\,\sigma^3} \overset{c = 0.4748}{=\!=} \frac{0.4748 \cdot 3.6}{\sqrt{120} \cdot \sqrt{2}^3} \approx$$

$$\approx 0.055 = 5.5\%$$

(4) Legyen $n=100$ és legyen $i=1,2,\dots,n$-re X_i az i-edik hallgató jegye. Legyen $S_n = X_1+\dots+X_n$. A szöveg szerint az X_i-k függetlenek és közülük

40-re $X_i \sim Uni(\{1,2\}) \Rightarrow \mathbb{E}X_i = 1.5$ és $1 =: a_i \le X_i \le b_i := 2$

és 60-ra $X_i \sim Uni(\{3,4,5\}) \Rightarrow \mathbb{E}X_i = 4$ és $3 =: a_i \le X_i \le b_i := 5$.

Ebből $\mathbb{E}S_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = 40 \cdot 1.5 + 60 \cdot 4 = \cancel{180}, 300$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 40(2-1)^2 + 60(5-3)^2 = 280,$$

a kérdés pedig $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > 3.5\right) = \mathbb{P}(S_n > 350) \underset{\text{választással}}{\overset{t:=50}{=\!=}} \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t)$.

A Hoeffding egyenlőtlenség szerint

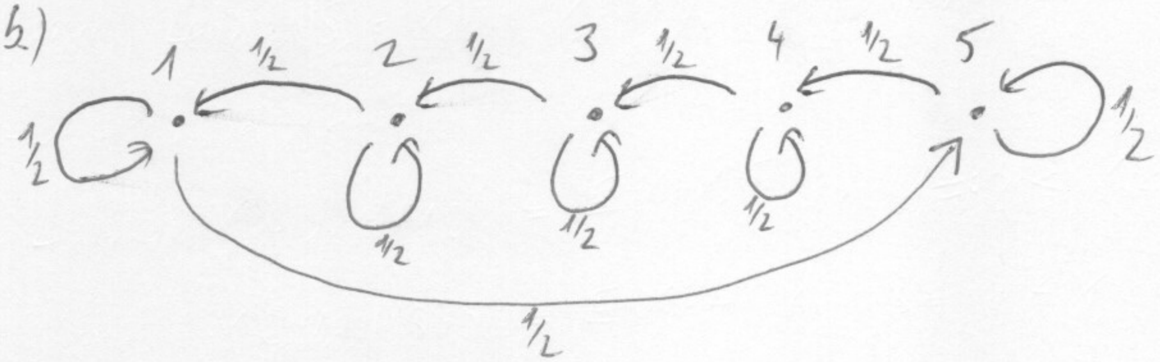
$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2 \cdot 50^2}{280}\right) \approx e^{-17.8571}$$

$$\boxed{\approx 1.8 \cdot 10^{-8}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > 3.5\right)} \text{ (}=\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t)\text{)}$$

(5) a.) $S=\{1,2,3,4,5\}$

b.)



c.)

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

d.) Legyen ~~csütör~~ hétfő a nulladik este, így a kérdés $P(X_3=5\mid X_0=2)$. A (2) állapotból az (5) állapotba 3 lépésben 3-féleképpen juthatunk: $2\to2\to1\to5$

$2\to1\to1\to5$

$2\to1\to5\to5$

tfh $X_0=2$

Vagyis $\boxed{P(X_3=5\mid X_0=2)} = P(2215)+P(2115)+P(2155) =$

$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{8}=0.375=37.5\%}$$