Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika 1. ZH pótlása – megoldások

2018 ősz, 2018.12.06 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

1. Egy asztalon három dobókocka van. Egy szabályos, kettő pedig cinkelt – az egyik cinkelten a 6-os valószínűsége $\frac{1}{2}$, a másikon $\frac{1}{10}$. Vaktában felveszünk egy kockát és addig dobáljuk, amíg ki nem jön egy 6-os. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

   Megoldás: Legyen $i = 1, 2, 3$-ra A_i az az esemény, hogy az i-edik kockát választjuk. Így $\{A_1, A_2, A_3\}$ teljes eseményrendszer, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}$. Legyen X a dobott szám. Adott i-re X *feltételes* eloszlása A_i feltétel mellett geometriai p_i paraméterrel, ahol $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{1}{10}$. Ezért $\mathbb{E}(X|A_i) = \mathbb{E}Geom(p_i) = \frac{1}{p_i}$. Végül a teljes várható érték tétel miatt

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X|A_i) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3}\frac{1}{p_i} = \frac{6+2+10}{3} = 6.$$

2. Egy útkereszteződésen percenként átlagosan 5 személyautó és 2 teherautó megy keresztül. (A többi jármű száma elhanyagolható.) A személyautók $\frac{1}{4}$ valószínűséggel mennek a megengedettnél gyorsabban, a teherautók pedig $\frac{1}{8}$ valószínűséggel, egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy egy két perc hosszúságú időintervallumban legalább 3 gyorshajtó halad át a kereszteződésen?

   Megoldás: Ésszerű feltevés, hogy a járművek Poisson folyamat szerint érkeznek, éspedig a személyautók és a teherautók egymástól független Poisson folyamat szerint. *(Megjegyzés: ez a feltevés addig életszerű, amíg a forgalom kicsi (nincs tele az út), így az egyes járművek tudnak tényleg függetlenül „dönteni” arról, hogy éppen ott legyenek-e vagy sem.)* Ha az időt percben mérjük, akkor a feladat szövege szerint a személyautók folyamatának rátája 5, a teherautóké 2.

   A feladat második mondatát úgy értettem, hogy a *kereszteződésen áthaladó* személyautók ill. teherautók mennek gyorsan $\frac{1}{4}$ ill. $\frac{1}{8}$ valószínűséggel. (És nem pedig az úton közlekedő összes: ez nem teljesen mindegy, mert a gyorsan menők több kereszteződésen mennek át időegységenként. Köszönet az észrevételért Ráth Balázsnak.) Remélem, mindenki így értette.

   Ezek szerint a gyorshajtó személyautók illetve teherautók folyamata *ritkítása* az eredeti folyamatoknak, vagyis ezek is független Poisson folyamatok, $5 \cdot \frac{1}{4}$ illetve $2 \cdot \frac{1}{8}$ rátával. Így az összes gyorshajtó együttesen is Poisson folyamat szerint érkezik, $\lambda := 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$ rátával.

   Tekintsünk egy fix két perc hosszú időintervallumot, és legyen X a kereszteződésen ezalatt áthaladó gyorshajtók száma. Így $X \sim Poi(\lambda \cdot 2) = Poi(3)$. Vagyis

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - [\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)] = 1 - e^{-3}\left[\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right] =$$

$$= 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) \approx 0.577$$

3. Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2}{4-2^z}$.

   a.) Mennyi X várható értéke?

   b.) Mennyi X szórása?

   c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ és a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

d.) **(Bónusz:)** Tényleg, van olyan valószínűségi változó, aminek ez a generátorfüggvénye?

Megoldás:

a.) $g'(z) = \frac{-2}{(4-2^z)^2}(-2^z \ln 2) = \frac{2\ln 2 \cdot 2^z}{(4-2^z)^2}$, így $\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{2\ln 2\cdot 2}{(4-2)^2} = \ln 2 \approx 0.69$.

b.) $g''(z) = 2\ln 2 \frac{2^z \ln 2 (4-2^z)^2 - 2^z \cdot 2(4-2^z)(-2^z \ln 2)}{(4-2^z)^4}$, amiből $g''(1) = 3(\ln 2)^2$. Így $Var(X) = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2 = 2(\ln 2)^2 + \ln 2 \approx 1.654$.

c.) $\mathbb{P}(X=0) = g(0) = \frac{2}{4-2^0} = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(X=1) = g'(0) = \frac{2\ln 2\cdot 2^0}{(4-2^0)^2} = \frac{2\ln 2}{9} \approx 0.154$

d.) Igen. Legyen $N \sim PesszGeom\left(p = \frac{1}{2}\right)$, így N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{p}{1-(1-p)z} = \frac{1}{2-z}$. Legyen $Y_1, Y_2 \ldots$ egymástól és N-től is független, $Y_i \sim Poi(\lambda = \ln 2)$. Így az Y_i-k közös generátorfüggvénye $g_Y(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{\ln 2(z-1)} = 2^{z-1} = \frac{2^z}{2}$. Ezért az $S_N := \sum_{i=1}^{N} Y_i$ véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $g_{S_N}(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{1}{2-\frac{2^z}{2}} = \frac{2}{4-2^z}$.

4. Egy pók által lerakott peték száma Poisson eloszlású $\lambda = 50$ várható értékkel. Minden pete $p = \frac{1}{5}$ valószínűséggel kel ki, egymástól és a peték számától is függetlenül. Mi a *kikelt* peték számának eloszlása? Miért? (A feladat megoldható pl. a generátorfüggvény kiszámolásával, de úgy is, ha egy tanult tételt alkalmazunk.)

   1. megoldás: Legyen $N \sim Poi(\lambda)$ a lerakott peték száma. $i = 1, 2, \ldots$-re legyen $X_i = 1$, ha az i-edik pete kikel, és $X_i = 0$, ha nem. A feladat szövege szerint $X_i \sim B(p)$, és az X_i-k függetlenek egymástól és N-től is. A kikelt peték száma az $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg. A generátorfüggvények $q := 1-p$ jelöléssel:

$$\begin{aligned} g_N(z) &= g_{Poi(\lambda)}(z) = e^{\lambda(z-1)} \\ g_{X_i}(z) &= g_{B(p)}(z) = q + pz \\ g_{S_N}(z) &= g_N(g_{X_i}(z)) = e^{\lambda(q+pz-1)} = e^{\lambda(pz-p)} = e^{p\lambda(z-1)} = g_{Poi(p\lambda)(z)}, \end{aligned}$$

   vagyis S_N Poisson eloszlású $p\lambda = \frac{1}{5}50 = 10$ paraméterrel.

   2. megoldás: Szabad tudni, hogy Poisson eloszlás ritkítása is Poisson eloszlású, a várható érték pedig persze $p\lambda$. Vagyis a kikelt peték száma $p\lambda = 10$ paraméterű Poisson eloszlású.

5. A „Mindent Bele” számítógépes vírus nem túl óvatos: amit csak tud, megpróbál megfertőzni. Emiatt az esetek 99%-ában azonnal észre is veszi egy vírusirtó vagy egy rendszergazda, és letörli. A maradék 1%-nyi esetben viszont nem bukik le azonnal, hanem fertőz, éspedig az előzményektől független véletlen számú gépet, aminek eloszlása $\frac{1}{100}$ paraméterű pesszimista geometriai. (Vagyis $\mathbb{P}(k \text{ fertőzés} \,|\, \text{nem bukik le azonnal}) = \left(\frac{99}{100}\right)^k \frac{1}{100}$, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$.) Kezdetben a vírusból egyetlen példányt engednek szabadon. Jelölje X ezen legelső példány által megfertőzött gépek számát.

   a.) Számoljuk ki X generátorfüggvényét. *Tipp: számolhatjuk az eloszlást teljes valószínűség tétellel, vagy közvetlenül a generátorfüggvényt teljes várható érték tétellel.*

   b.) Mennyi X várható értéke? *Tipp: ez számolható az előző eredmény felhasználásával, vagy közvetlenül is.*

   c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a vírus legkésőbb a második generációra kihal? (A legelső példány alkotja egyedül a nulladik generációt.)

   d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a vírus terjedése előbb-utóbb megáll?

   e.) Mennyi a vírus terjedése során megfertőzött összes gép számának várható értéke?

Megoldás:

a.) Legyen A_0 az az esemény, hogy a vírust azonnal felfedezik, A_1 pedig az, hogy nem. Legyen $p = \frac{1}{100}$ és $q = 1 - p = \frac{99}{100}$. Így $\{A_0, A_1\}$ teljes eseményrendszer, $\mathbb{P}(A_1) = p$, $\mathbb{P}(A_0) = q$. Az A_0 feltétel mellett $X = 0$, míg az A_1 feltétel mellett $X \sim PesszGeom(p)$. Így a teljes várható érték tétel szerint X generátorfüggvénye

$$g(z) = \mathbb{E}(z^X) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{E}(z^X|A_0) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{E}(z^X|A_1) = q\mathbb{E}(Z^0) + p\, g_{PesszGeom(p)}(z) =$$
$$= q + p\frac{p}{1-qz} = \frac{99}{100} + \frac{1}{100}\frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{99}{100}z} = \frac{99}{100} + \frac{1}{100}\frac{1}{100 - 99z}.$$

b.) $m := \mathbb{E}X = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{E}(X|A_0) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{E}(X|A_1) = q \cdot 0 + p \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$. Persze ugyanez jön ki mint $\mathbb{E}X = g'(1)$.

c.) Legyen Z_n az n-edik generácó elemszáma. Ekkor Z_n Galton-Watson elágazó folyamat X egylépéses utódszámeloszlással. Vagyis ha $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ a kihalás valószínűsége az n-edik generációig, akkor az r_n sorozat eleget tesz az $r_0 = 0$; $r_{n+1} = g(r_n)$, ha $n \geq 0$ rekurziós szabálynak. Vagyis

$$r_0 = 0$$
$$r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{99}{100} + \frac{1}{100}\frac{1}{100} = 0.9901$$
$$r_2 = g(r_1) = g(0.9901) = \frac{99}{100} + \frac{1}{100}\frac{1}{100 - 99 \cdot 0.9901} \approx 0.99505.$$

d.) Mivel $m < 1$, a folyamat szubkritikus, így a kihalás valószínűsége $r_\infty = 1$.

e.) $N = \sum_{n=0}^{\infty}$ jelöléssel, mivel $m < 1$, tudjuk, hogy $\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{99}{100}} = 100$. (Ebbe bele van értve a kezdetben szabadon engedett egyetlen példány is.)