

Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika

2. ZH pótlása

2019 ősz, 2019.12.16 10:00

Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 9 pontot ér.

1. Bergengóciában minden gyerek az apja családnevét örökli. Minden gyerek, aki megszületik, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz fiú és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lány, a többitől függetlenül. A családtervezési szokások viszont sajátosak: minden férfinak addig születnek újabb és újabb gyerekei¹, amíg nem születik egy lány. Amikor az első lány megszületik, az apa felhagy a szaporodással.² (Így minden férfinak legalább egy gyereke születik, és pontosan egy lánya.)

Gócbereki Pál gyerekkorában egyedül viseli a Gócbereki nevet.

- a.) Legyen X Gócbereki Pál *fiú* gyermekeinek száma. Mi X eloszlása?
 - b.) Modellezzük Gócbereki Pál leszármazottai között a Gócbereki vezetéknevet öröklő (vagyis egyenes ági) *fiúk* számát Galton-Watson folyamattal! Legyen világos, hogy milyen betű mit jelöl!
 - c.) Mennyi a valószínűsége, hogy Gócbereki Pálnak nem születik egyenes ági ükunokája?
 - d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a Gócbereki név előbb-utóbb kihal?
2. Egy csillagászati részecske-detektorba az észlelt részecskék Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan kettő. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy az 1000-edik részecskére 9 óra 30 percnél többet kell várni!

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\text{ha } x > 0).$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\text{ha } x > 0.)$$

3. Egy repülőgépen 200 utas repül, ebből 170 turista osztályon és 30 első osztályon. A turista osztályon utazók fejenként legfeljebb 20 kg csomagot adhatnak fel, az első osztályon utazók fejenként legfeljebb 30 kg-ot. Az egyes utasok által feladott csomagok tömege független. A 200 utas által feladott össztömeg átlagosan 3000 kg szokott lenni. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a feladott csomagok össztömege eléri a 3500 kg-ot!
4. Pistike a TV-jén 10 csatornát tud fogni, ezek 1-től 10-ig vannak számozva. Egy este egyik műsor sem tetszik neki, ezért fel-le váltogatja a csatornákat: egy csatornához érkezte pár másodpercig nézi, majd $\frac{1}{2}$ valószínűséggel felfelé lép 1-gyel, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig lefelé 1-gyel, az előzményektől függetlenül. (A léptető gombbal körbe lehet menni: ha az 1-esről lefelé lép, a 10-esre jut, ill. ha a 10-esről felfelé lép, akkor az 1-esre jut.)
 - a.) Legyen X_n a Pistike által nézett csatorna száma n váltás után. Rajzoljuk fel az X_n Markov lánc gráf-reprezentációját!
 - b.) Pistike az 1-es csatornáról indul. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 100 váltás után pont a 10-est nézi?

¹A gyerekek egyesével születnek: Bergengóciában ikrek nincsenek.

²Ezt ki-ki ízlése szerint értelmezheti: a.) Ha születik egy lány, elmegy a kedvük a további gyerekektől. b.) Addig nem nyugszanak, amíg nem születik végre egy lány.

5. Egy számítógépes hálózati eszközhöz az üzenetek Poisson folyamat szerint érkeznek, másodpercenként átlagosan 100. Minden üzenet feldolgozása az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, 1 ezred másodperc várható értékkel. A feldolgozás ideje alatt az eszköz foglalt, és az esetleges újabb bejövő üzenetek elvesznek (sor nincs).
- a.) Modellezzük az eszköz szabad ill. foglalt voltát kétállapotú Markov láncsal. Adjuk meg az ugrási rátákat, indoklással!
- b.) Hosszú távon az idő mekkora hányadában lesz az eszköz foglalt? Miért?