

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
pótpótZH, 2023 ősz

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.
Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 9 pontot ér.

1. a.) Pistike elgurít egy szabályos dobókockát. A dobott számot jelölje X . Mi X generátorfüggvénye?
b.) Pistike elgurít 10 szabályos dobókockát. Jelölje Y a dobott számok összegét. Mi Y generátorfüggvénye?
c.) Pistike addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg ki nem jön a 6-os. Jelölje Z a szükséges dobások számát. Mi Z generátorfüggvénye?
2. Legyen Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, ahol minden egyednek az előzményektől függetlenül 1, 2, 3 vagy 4 utóda van, egyformán $\frac{1}{4}$ valószínűséggel, és $Z_0 = 1$.
a.) Mi Z_1 generátorfüggvénye?
b.) Mennyi Z_5 várható értéke?
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?
3. Jancsi szaladgálás közben rengeteget lép. Minden lépésnél az előzményektől függetlenül valamilyen kis valószínűséggel elesik. Óránként átlagosan 6-szor szokott elesni. Amikor elesik, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a térdét, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel a könyökét üti be, a maradék $\frac{1}{6}$ valószínűséggel egyiket sem. (Annak valószínűsége, hogy mindkettőt beüti, elhanyagolható.)
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első fél órában 2-nél kevesebb eséssel megússza?
b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első fél órában térd-beverés nélkül megússza?
c.) Tegnap Jancsi két órát szaladgált, és ez alatt pontosan 4-szer ütötte be a könyökét. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-nál többször esett el?
4. Egy bolha a számegyenesen ugrál. Minden másodpercben egyet ugrik: $\frac{2}{3}$ valószínűséggel 2 métert előre, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont 1 métert hátra. Legyen R annak a valószínűsége, hogy a bolha 800 másodperc elteltével 1000 méternél is többet haladt előre. Ha R -t a centrális határeloszlás tétel segítségével közelítjük, legfeljebb mennyi lesz a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A tételben szereplő konstanst vehetjük 0.4748-nak.)
5. Egy bolha a számegyenesen ugrál. Minden másodpercben egyet ugrik: $\frac{2}{3}$ valószínűséggel 2 métert előre, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont 1 métert hátra. Legyen R annak a valószínűsége, hogy a bolha 800 másodperc elteltével 1000 méternél is többet haladt előre. Adjunk nagy eltérés becslést R -re!