

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

egyetlen pótpótZH, 2024 őszi

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 9 pontot ér.

1. Egy jelfeldolgozó berendezés a hozzá érkező jeleket véletlen $X \in \mathbb{N}$ időegység késleltetéssel továbbítja. A továbbított jel egy újabb feldolgozóba kerül, ami újabb, az előzőtől független Y időegységgel késlelteti, ahol Y értéke 0 vagy 1 lehet, azonos valószínűséggel. Mért csak a két késleltetés $X+Y$ összegét tudjuk, és erre az adódik, hogy
- | | | | | |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\mathbb{P}(X+Y=k)$ | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.2 |

Mi az X késleltetés eloszlása?

(Tipp: számoljuk ki a generátorfüggvényeket.)

2. Egy betegség kivizsgálása során Dr. House vizsgálatok sorozatát végzi. A legelső vizsgálatról kezdődően minden egyes vizsgálat eredményét látva a doktornak véletlen számú újabb elvégzendő vizsgálat jut eszébe, ami az előzményektől függetlenül lehet 0, 1 vagy 2, rendre $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$ valószínűséggel.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy a kivizsgálás előbb-utóbb véget ér?

b.) Mennyi a kivizsgálás során elvégzett vizsgálatok számának várható értéke?

3. Jani hazudós: az eseteknek csak egy nagyon kis hányadában mond igazat. Ám mivel nagyon sokat beszél, így is megesik hetente átlagosan egyszer, hogy igazat mond.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy Jani holnap legalább kétszer igazat mond majd?

b.) Jani múlt héten hétfőtől szombatig egyszer sem mondott igazat. Mennyi a valószínűsége, hogy vasárnap sem?

4. Juliska szalagavatóra, ballagásra, érettségire, felvételire, gólyatáborra és gólyabálra készül, ezért ruhákat próbál. Minden ruhadarab, amit felpróbál, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{5}$ valószínűséggel tetszik neki: ezeket megveszi, a többit nem. A felsorolt programokhoz összesen 100 ruhadarabra van szüksége. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy elég lesz 450 (vagy annál kevesebb) ruhadarabot felpróbálnia.

5. Mórlickának az anyukája minden délután felvisz a szobájába egy kupac mosott ruhát. Ezt Mórlicka nem mindig pakolja el: minden este, az előzményektől függetlenül, 0.4 valószínűséggel két kupac ruhát pakol el, 0.4 valószínűséggel egyet, 0.2 valószínűséggel pedig egyet sem. Kivétel, ha csak egy kupacot talál, mert akkor azt az egyet 0.8 valószínűséggel pakolja el. Jelölje X_n a Mórlicka szobájában található ruhakupacok számát az n -edik napon éjfélkor.

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc állapotterét, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját.

b.) Szeptember 1-jén éjfélkor 1 kupac ruha volt a szobájában. Mennyi a valószínűsége, hogy 3-án éjfélkor 1 se lesz?