pp (1) Generátorfüggvénnyel:

$Y \sim B(\frac{1}{2}) \Rightarrow g_Y(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$

~~X+Y~~ eloszlása adott $g_{X+Y}(z) = \sum_k \mathbb{P}(X+Y=k)\, z^k = \frac{2}{10}z + \frac{3}{10}z^2 + \frac{3}{10}z^3 + \frac{2}{10}z^4$

Ám X és Y független $\rightarrow$ $g_{X+Y}(z) = g_X(z) \cdot g_Y(z)$, amiből

$$g_X(z) = \frac{g_{X+Y}(z)}{g_Y(z)} = \frac{\frac{2}{10}z + \frac{3}{10}z^2 + \frac{3}{10}z^3 + \frac{2}{10}z^4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z} \xrightarrow[\text{osztás}]{\text{polinom-}} \frac{4}{10}z + \frac{2}{10}z^2 + \frac{4}{10}z^3$$

$\Rightarrow$

l	1	2	3
$\mathbb{P}(X=l)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$

pp (2) A vizsgálatok Galton-Watson elágazó folyamat szerint szaporodnak: egy vizsgálat gyerekei legyenek az ő eredményeinek láttán Dr. House eszébe jutó újabb vizsgálatok.

Az egylépéses utódszám eloszlása

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$

amiből $m := \mathbb{E}X = 1$, a folyamat kritikus (és $X \not\equiv 1$)

$\Rightarrow$ a.) $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$

b.) $\mathbb{E}(\text{teljes család mérete}) = \infty$

pp (3) <u>Tegyük fel</u>, hogy az egyes megszólalásainál egymástól <u>függetlenül</u> mond (kis valószínűséggel) igazat. Így az igazmondások Poisson-folyamattal modellezhetők, $\lambda = 1 \ \frac{1}{\text{hét}} = \frac{1}{7} \ \frac{1}{\text{nap}}$ intenzitással.

a.) $X :=$ a holnapi igazmondások száma:

$$X \sim Poi\left(\tfrac{1}{7}\right) \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = \cancel{1-\left[e^{-7}\frac{7^0}{0!} + e^{-7}\frac{7^1}{1!}\right] =}$$

$$\cancel{= 1 - e^{-7}(1+7) =}$$

$$= 1 - \left[e^{-\frac{1}{7}} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^0}{0!} + e^{-\frac{1}{7}} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^1}{1!}\right] = 1 - e^{-\frac{1}{7}}\left(1 + \frac{1}{7}\right)$$

$$\approx 9{,}3 \cdot 10^{-3} = \underline{0{,}93\,\%}$$

b.) $Y :=$ az igazmondások száma hétfőtől szombatig

$Z :=$ — || — vasárnap

Ekkor Y és Z független, $Z \sim Poi\left(\frac{1}{7}\right)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Z=0 \mid Y=0) = \mathbb{P}(Z=0) = e^{-\frac{1}{7}} \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{1}{7}} \approx 0{,}867 = \underline{86{,}7\,\%}$$

pp ④ = vizsga ①

<u>1. megoldás:</u> Legyen $n=450$ a megengedett próbálkozások száma és

legyen $i=1,2,\dots,n$-re $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik próba után vásárol} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Így $S_n = X_1 + \dots + X_n$ a 450 próbálkozásból megvett ruhák száma, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 100)$.

A szöveg szerint $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{5}\right)$ függetlenek.

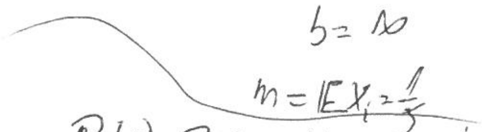
<u>1. megoldás a) változat:</u> X_i-k <u>korlátosak</u> $\Rightarrow$ alkalmazható a Hoeffding egyenlőtlenség: $a_i := 0 \leq X_i \leq 1 =: b_i$, $\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_i = 450 \cdot \frac{1}{5} = 90$,

$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 = 450(1-0)^2 = 450$, és $t := 10$ választással

$$\mathbb{P}(S_n \geq 100) = \mathbb{P}(S_n \geq \underset{90}{\mathbb{E}S_n} + \underset{10}{t}) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right\} \leq e^{-\frac{200}{450}} \approx 0.64$$

$= \underline{64\%}$

<u>1. megoldás b) változat:</u> X_i-k <u>azonos eloszlásúak</u> $\Rightarrow$ alkalmazható a Cramér tétel: $\mathbb{P}(S_n \geq 100) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{100}{450}\right) = \mathbb{P}(S_n/n \in [a,b))$, ahol $a = \frac{100}{450} \approx 0.222$



Mivel $a > m$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b)\right) \lessapprox e^{-nI(a)}$$ ahol I a $\mathcal{B}(p=\frac{1}{5})$ eloszlás Cramér rátafüggvénye:

$$I(x) = x \ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p} = x\ln\frac{x}{1/5} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-\frac{1}{5}}.$$

Spec. $a = \frac{100}{450}$-nél $I(a) \approx 1.5027658 \cdot 10^{-3} \Rightarrow nI(a) \approx 0.676$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \geq 100) \lessapprox e^{-nI(a)} \approx 0.509 = \underline{50.9\%}$$

PP(4) ~~kz~~ =vizsga (1)

2. megoldás: legyen $n=100$ a megveendő ruhadarabok száma, és $i=1,2,\dots,n$-re legyen X_i az i-edik ruhadarab megvásárlásához szükséges próbák száma. Így $X_i \sim Geom(p=\frac{1}{5})$ függetlenek, és

$S_n := X_1+\dots+X_n$ az összes szükséges próba száma.

A kérdés $\mathbb{P}(S_n \le 450)$.

Mivel az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak, ha számolható a Cramér tétel: $m = \mathbb{E}X_i = \frac{1}{p} = 5$,

$$\mathbb{P}(S_n \le 450) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{450}{100} = 4{,}5\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a,b]\right) \lessapprox$$

ahol $a = \cancel{-\infty}$, $b = 4{,}5 < m$

$\le e^{-nI(b)}$ ahol I a $Geom(p)$ eloszlás Cramér rátafüggvénye: $I(x) = (x-1)\ln\frac{x-1}{1-p} - x\ln x - \ln p$

Spec. ~~x=~~ $b=4{,}5$, $p=\frac{1}{5}$ esetén $I(b) \approx 6{,}762446 \cdot 10^{-3}$

$\Rightarrow$ $nI(b) \approx 0{,}676$

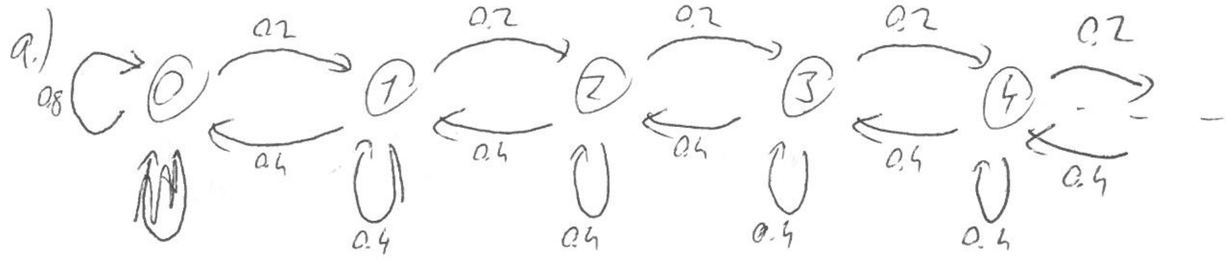
$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(S_n \le 450) \lessapprox e^{-nI(a)} \approx 0{,}509 = \underline{50{,}9\%}$

5) Mivel minden nap pontosan 1 kupac érkezik, a kupacok száma

- 1-gyel nő, ha nem ~~tesz~~ pakol el semmit
- változatlan, ha 1 kupacot pakol el
- 1-gyel csökken, ha 2 kupacot is elpakol

Vagyis

a.)



b.) 1-jétől 3-áig az $\underline{2 \text{ nap}} \Rightarrow P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = ?$

1-ből 0-ba 2 lépésben 2-féleképpen lehet eljutni:

$1 \to 1 \to 0$ vagy $1 \to 0 \to 0$

$\Rightarrow P(X_2 = 0 \mid X_0 = 1) = P_{11} P_{10} + P_{10} P_{00} = 0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.48 = \underline{\underline{48\%}}$